

Oberseminar:
Hochpräzisionsexperimente der modernen Physik
Thema: Zeitdilatation (Zwei-Photonen-Spektroskopie)

Marcus Beranek
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

10. Juli 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Spezielle Relativitätstheorie	2
1.1	Grundlagen	2
1.2	Der Doppler-Effekt	4
2	Test-Theorien	7
2.1	Möglichkeiten zur experimentellen Bestätigung der SRT	7
2.2	Test-Theorie nach Robertson	8
2.3	Test-Theorie nach Mansouri und Sexl	9
3	Experimente	11
3.1	Ives, Stilwell (1938)	11
3.2	MacArthur, et al.(1986)	12
3.3	Juncar, et al. (1985)	14
3.4	Zwei-Photonen-Absorption (TPA)	17
3.5	Kaivola, et al.(1985)	19
3.6	Riis, et al. (1988)	20
3.7	McGowan, et al. (1993)	22
3.8	Grieser, et al. (1994)	23
4	Zusammenfassung	28
5	Ergänzungen	29

Einleitung

Die Spezielle Relativitätstheorie wurde 1905 zum ersten mal von Albert Einstein formuliert. Da aufgrund der darin enthaltenen Postulate das Verständnis von Raum und Zeit grundlegend verändert wurde, ist man seit jeher bestrebt, diese Theorie experimentell zu verifizieren. In diesem Beitrag sollen eine kurze Übersicht über die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie gegeben werden, sowie einige aktuelle Experimente vorgestellt werden, die mit hoher Genauigkeit zur Bestätigung der Speziellen Relativitätstheorie beigetragen haben.

1 Spezielle Relativitätstheorie

1.1 Grundlagen

Postulate

Jede Darstellung eines physikalischen Gesetzes geschieht in einem Koordinatensystem. Eine besondere Klasse stellen die Koordinatensysteme dar, in denen die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten. Diese nennt man Inertialsysteme.

Die wichtigsten Forderungen der Speziellen Relativitätstheorie sind nun:

- Relativitätsprinzip – In allen Inertialsystemen laufen *alle* Naturgesetze (also nicht nur die Newtonschen, sondern auch die Maxwellschen Gesetze) *gleichartig* ab. Es gibt kein ausgezeichnetes Bezugssystem.
- Homogenität von Raum und Zeit.
- Isotropie des Raumes – Es gibt *keine ausgezeichnete Richtung*. Alle Richtungen sind gleichwertig.

Aus diesen und einigen weiteren Forderungen folgt nun, daß es eine obere, konstante Schranke für Geschwindigkeiten gibt, die nicht überschritten werden kann. Diese obere Grenzgeschwindigkeit wird mit der Lichtgeschwindigkeit identifiziert¹.

Galilei-Transformation

Um nun Gesetze, die in einem Inertialsystem gelten, in einem anderen Inertialsystem zu formulieren, muß eine Koordinaten-Transformation durchgeführt werden. Die uns am „natürlichsten“ erscheinende Transformation ergibt sich aus der simplen Addition der Geschwindigkeiten. Diese Transformation wird „Galilei-Transformation“ genannt:

$$\begin{aligned}T &= t \\X &= x - v \cdot t \\Y &= y \\Z &= z\end{aligned}$$

¹Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist *keine* Folgerung der Speziellen Relativitätstheorie. Sie ist vielmehr ein Postulat, welches bereits in den Maxwell-Gleichungen vorhanden ist.

Dabei bezeichnen Großbuchstaben die Größen im bewegten Bezugssystem S' , welches sich relativ zu dem als ruhend angenommenen System S (Kleinbuchstaben) mit der Geschwindigkeit v bewegt, wobei v parallel zu x sein soll.

In beiden Inertialsystemen ist die Zeit gleich, man spricht auch von einer absoluten Zeit.

Unterwirft man nun die Maxwell'schen Bewegungsgleichungen einer solchen Galilei-Transformation, so stellt man fest, daß sich die Bewegungsgleichungen im bewegten System S' nicht mehr in der Form darstellen lassen, wie es noch im System S der Fall war.

Betrachten wir die homogene Wellengleichung für ein System S

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

und führen eine Galilei-Transformation in ein System S' durch, welches sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v bewegt, so erhalten wir [3]:

$$\Delta'\psi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t'} - \underline{v} \cdot \nabla' \right]^2 \psi = 0$$

Die Maxwell'schen Gleichungen sind also nicht invariant gegenüber der Galilei-Transformation. Dies zeigt sich auch schon daran, daß in den Maxwell'schen Gleichungen explizit die Phasengeschwindigkeit des Lichts enthalten ist.

Lorentz-Transformation

Aus den Postulaten der Speziellen Relativitätstheorie folgt nun eine Klasse von Transformationen, unter denen sich die Maxwell'schen Gleichungen invariant verhalten. Diese heißen „Lorentz-Transformationen“ und lauten (für v parallel x):

$$\begin{aligned} T &= \gamma(v) \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \\ X &= \gamma(v) \cdot (x - v \cdot t) \\ Y &= y \\ Z &= z \end{aligned}$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \beta &= \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Man sieht nun, daß Längen- und Zeitmessungen nicht absolut erfolgen können, sondern immer nur abhängig von der relativen Geschwindigkeit der zueinander bewegten Inertialsysteme.

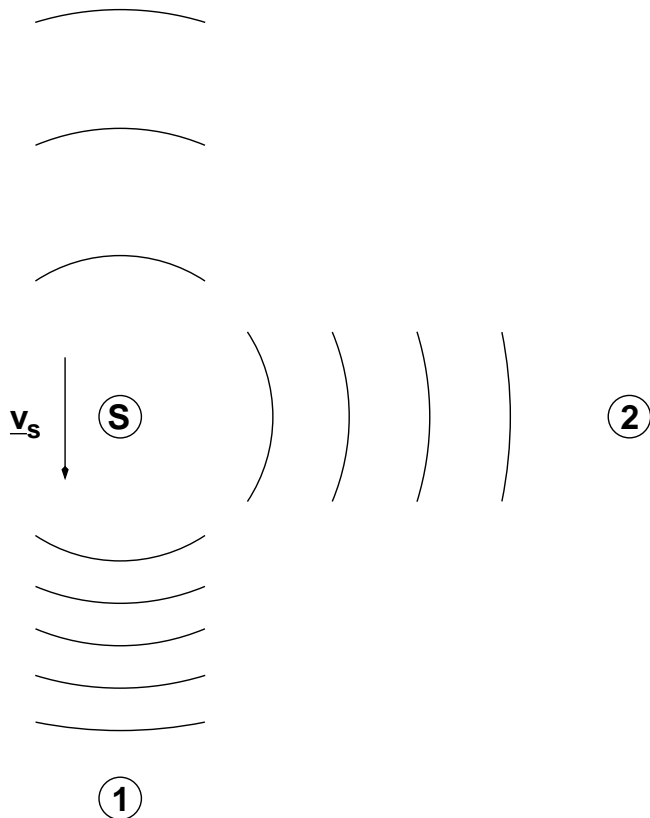
Aus der Lorentz-Transformation folgen nun direkt die Formeln für die Zeitdilatation $\Delta T = T_2 - T_1 = \gamma \cdot (t_2 - t_1) = \gamma \cdot \Delta t$ und die Längenkontraktion $\Delta X = X_2 - X_1 = \gamma \cdot (x_2 - x_1) = \gamma \cdot \Delta x$. Bei den Differenz-Betrachtungen entfallen natürlich alle Längen und Zeiten, die die Relativbewegung der Inertialsysteme zueinander beschreiben².

²Diese müssen allerdings bei Transformation einzelner Punkte berücksichtigt werden.

1.2 Der Doppler-Effekt

Klassische Darstellung

Bewegt sich ein Sender S mit einer konstanten Geschwindigkeit v_S auf einen Empfänger zu und emittiert dabei ein Signal mit der Frequenz ν , so sieht der Empfänger ein in der Frequenz verschobenes Signal. Die Wellenlängen werden verkürzt, die Frequenz wird somit größer (Blauverschiebung). Entfernt sich der Sender vom Beobachter, so wird die Wellenlänge größer und damit die Frequenz kleiner (Rotverschiebung).



Klassischer Doppler-Effekt: 1 sieht eine höhere Frequenz als S sendet, während 2 gar keine Frequenzverschiebung wahrnimmt. Für den ruhenden Empfänger in 1 gilt: $\nu' = \nu \cdot (1 + \frac{v_s}{c})$

Ebenso wie der Sender kann auch der Empfänger bewegt sein und eine Geschwindigkeit v_E besitzen.^a Die Frequenzverschiebung ist nun gegeben durch

$$\nu' = \nu \frac{1 + \frac{v_S}{c}}{1 - \frac{v_E}{c}}$$

Bewegen sich Sender und Empfänger nicht direkt aufeinander zu, so ist der Winkel, unter dem der Empfänger den Sender sieht, zu berücksichtigen. Befindet sich der Empfänger in der Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Senders, so ist das Signal, welches er empfängt, in der Frequenz unverschoben.

Zwei Dinge sind hierbei zu merken:

1. Senkrecht zur Bewegung existiert keine Doppler-Verschiebung.
2. Die Doppler-Verschiebung ist sowohl explizit abhängig von der Geschwindigkeit der Senders, als auch von der Geschwindigkeit des Empfängers. Nur bei kleinen Geschwindigkeiten können v_E und v_S durch die Relativgeschwindigkeit $v_{rel} = v_S - v_E$ angenähert werden.

^aStreng genommen müssten eigentlich drei Geschwindigkeiten betrachtet werden: die des Senders, des Empfängers und die des Mediums.

Relativistische Sichtweise

In der Formulierung der relativistischen Theorie, ergibt sich nun folgende Situation: ebenso wie im klassischen Fall sieht der Empfänger ein frequenzverschobenes Signal. Dieses ist jetzt aber nur noch von der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger abhängig, nicht mehr explizit von den Einzelgeschwindigkeiten.

Das ist eine direkte Folge des Relativitätsprinzips: Ein Signal, welches von System S dem System S' nachgesendet wird, muß für S' genauso erscheinen, wie für S ein Signal, welches von S' entgegen S gesendet wird.

Wir betrachten eine Schwingung in S :

$$A = A_0 \cdot \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Und führen eine Lorentz-Transformation in das System S' durch:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cdot \sin 2\pi\nu \left(\frac{T + \frac{v}{c^2}X}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{c} \cdot \frac{X + vT}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= A_0 \cdot \sin 2\pi \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(T + \frac{v}{c^2} - \frac{X}{c} - \frac{vT}{c} \right) \\ &= A_0 \cdot \sin 2\pi \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}} (1-\beta) \left(T - \frac{X}{c} \right) \\ &= A_0 \cdot \sin 2\pi\nu' \left(T - \frac{X}{c} \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \nu' = \nu \cdot \gamma \cdot (1-\beta)$$

Daraus ergibt sich also für die Frequenz im bewegten System S' :

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu \cdot \frac{1 - \beta \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \nu' &= \nu \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta \cdot \cos \varphi'} \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß sich aufgrund der Längenkontraktion auch die Winkelgrößen transformieren.³

Betrachten wir nun zwei Spezialfälle:

1. parallel bzw. antiparallel:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \quad (\varphi' = 0)$$

$$\nu' = \nu \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} \quad (\varphi' = \pi)$$

Für $\beta < 1$ können wir die Wurzel in eine Reihe entwickeln. Dadurch ergibt sich:

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \right) \quad (\varphi' = 0)$$

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \right) \quad (\varphi' = \pi)$$

³Dies wird sofort klar, wenn man die Winkel über die trigonometrischen Funktionen als Längenverhältnis der Seiten in einem Dreieck definiert, in dem eine Katete der Längenkontraktion unterworfen ist und die andere nicht.

Die neue Frequenz besitzt also sowohl lineare als auch quadratische Terme in β . Wenn wir Terme quadratischer und höherer Ordnung vernachlässigen, stimmt das Ergebnis mit dem bereits diskutierten klassischen Fall überein. Weiterhin ist festzuhalten, daß der lineare Term vorzeichenbehaftet ist (da er abhängig von v ist), er somit also bei einer Superposition von Schwingungen in paralleler und antiparalleler Richtung verschwinden muß.

2. senkrecht:

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \neq 0 \quad \varphi' = \frac{\pi}{2}$$

Der Anteil senkrecht zur Bewegungsrichtung verschwindet nicht. Die Existenz einer Frequenzverschiebung senkrecht zur Bewegungsrichtung ist klassisch nicht erklärbar.

2 Test-Theorien

2.1 Möglichkeiten zur experimentellen Bestätigung der SRT

Um nun die Spezielle Relativitätstheorie zu bestätigen oder widerlegen zu können, ist es notwendig, Experimente zu finden, in denen relativistische Effekte nicht vernachlässigbar sind. Einige sollen hier kurz erwähnt werden:

Lebensdauer relativistischer Teilchen

Bewegt sich ein Teilch mit einer Geschwindigkeit v , so muß bei allen Zeitmessungen die Zeitdilatation berücksichtigt werden. Hat das Teilchen in ruhendem Zustand die Lebensdauer τ , so wird auch das bewegte Teilchen in seinem Ruhesystem die Lebensdauer τ haben. Ein als ruhend angenommener Beobachter im Laborsystem, der das bewegte Teilchen sieht, wird nun aber die Zeit $t = \tau \cdot \gamma$ als Lebensdauer des bewegten Teilchens wahrnehmen. Ebenso könnte man auch sagen, daß der vom Teilchen während der Zeit t im Laborsystem zurückgelegte Weg für das Teilchen längenkontrahiert wird, so daß es in seinem Ruhesystem nur die Zeit τ für den verkürzten Weg benötigt.

Betrachtet man nun z.B. Myonen, die aufgrund der kosmischen Strahlung in der Erdatmosphäre in einer Höhe von etwa 20 km entstehen, und sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $v \approx 0.99 \cdot c$ bei einer Lebensdauer von $\tau \approx 2.2 \cdot 10^{-6} s$ auf die Erde bewegen, so kommt man klassisch zu dem Ergebnis, daß diese Myonen einen Weg von nur etwa 660 m zurücklegen können. Trotzdem sind diese Myonen noch auf der Erdoberfläche detektierbar. Aufgrund der Zeitdilatation ergibt sich die Lebensdauer im System der Erde zu $t \approx 4 \cdot 10^{-5} s$, wodurch sie einen Weg von etwa 13 km zurücklegen können.

Hierbei muß allerdings auch noch das Gravitationspotential berücksichtigt werden, welches einen zusätzlichen Einfluß auf Zeitdilatation und Längenkontraktion hat. Diese Phänomene sind Bestandteil der Allgemeinen Relativitätstheorie und sollen hier nicht näher betrachtet werden.

Eine experimentelle Bestätigung dieser Überlegungen zur Lebensdauer bewegter Teilchen findet sich in [14] und [10].

Vergleich bewegter Atomuhren mit ruhenden

Mit der Entwicklung immer genauerer Möglichkeiten zur Zeitmessung, konnte der Effekt der Zeitdilatation direkt nachgewiesen werden. Dazu wurden z.B. Atomuhren in einem Flugzeug bewegt und mit ruhenden Uhren auf der Erde verglichen [15]. In einem ähnlichen Experiment wurden die Uhren an Bord der Satelliten des Global-Positioning-System (GPS) zur Messung der Zeitdilatation benutzt [18].

Auch hier müssen Einflüsse des Gravitationspotentials berücksichtigt werden. Des weiteren hat man bei Uhrenvergleichen immer das Problem, daß eine Synchronisierung der Uhren vorgenommen werden muß.

Raumabhängige Ausbreitung des Lichts

Wenn es eine Anisotropie im Raum gibt, so müßte das Licht in unterschiedlichen Raumrichtungen unterschiedliche Geschwindigkeiten besitzen. Es müßten also Unterschiede in der

Laufzeit eines Lichtweges in einem mit der Erde mitgeführten Bezugssystem meßbar sein gegenüber einem Bezugssystem, in dem die Fixsternene ruhen. Dieses müßte durch Interferenz zweier Strahlen, die gleichlange, aber unterschiedlich gerichtete Wege durchlaufen, meßbar sein. [4]

Geschwindigkeitsabhängigkeit einer festen Länge

Ebenso wie man eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Raumrichtung messen könnte, müßte auch eine Abhängigkeit einer festen, durch eine Interferometrie vorgegebenen Länge von der Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme meßbar sein. Diese würde sich in einer Änderung des Interferenzbildes bemerkbar machen [1].

Masse als Testparameter in Abhängigkeit von v

Die Ruhemasse eines Teilchens ist konstant. Wird einem Teilchen Energie zugeführt, so nimmt die Geschwindigkeit zu. Da aber $v < c$ sein muß, wird aufgrund von Energie- und Impulserhaltung auch die Masse des Teilchens zunehmen müssen. Dadurch bleibt die Geschwindigkeit v des Teilchens kleiner als die Grenzgeschwindigkeit c . Mit einem Massenspektrometer kann somit bei verschiedenen, bekannten Geschwindigkeiten die Masse ermittelt werden [5]. Hier können auch Unterschiede zwischen „schwerer“ und „träger“ Masse in die Theorie eingehen.

Messung des transversalen Doppler-Effekts

Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten, den transversalen oder quadratischen Doppler Effekt zu messen:

1. Senkrecht zur Bewegungsrichtung: Problem hierbei ist zum einen die genaue Winkelseinstellung. Schon geringe Abweichungen vom rechten Winkel verursachen Fehler, die in der Größenordnung des zu messenden Effektes liegen. Zum anderen wird das Wechselwirkungsvolumen z.B. bei Experimenten, bei denen ein Laser einen Teilchenstrahl kreuzt, stark verkleinert.
2. Parallel zur Bewegungsrichtung: Hier ist das größte Problem das Vorhandensein des linearen Doppler-Effekts, der den quadratischen Effekt um mehrere Größenordnungen überwiegt.

Auf Messungen des transversalen Doppler-Effekts wird in Abschnitt 3 genauer eingegangen.

2.2 Test-Theorie nach Robertson

Um die Spezielle Relativitätstheorie zu testen, ist es notwendig, eine allgemeinere, mit weiteren Parametern versehene Formulierung zu finden, so daß durch ein Experiment diese zusätzlichen Parameter bestimmt werden können. Diese zusätzlichen Parameter müssen bei Korrektheit der Theorie in die spezielle Formulierung dieser Theorie übergehen.

In der Test-Theorie nach Robertson führt man nun eine allgemeinere Lorentz-Transformation der folgenden Art ein:

$$\begin{aligned}t &= a_0 \cdot T + \frac{v}{c^2} \cdot a_1 \cdot X \\x &= v \cdot a_0 \cdot T + a_1 \cdot X \\y &= a_2 \cdot Y \\z &= a_2 \cdot Z\end{aligned}$$

Hierbei sind die Parameter a_0, a_1, a_2 abhängig von der Geschwindigkeit v . Für die Spezielle Relativitätstheorie sind diese Parameter darstellbar als $a_0 = \gamma(v) \cdot g_0$, $a_1 = \gamma(v) \cdot g_1$, $a_2 = g_2$ und müssen in die Werte $g_0 = g_1 = g_2 = 1$ übergehen.

Außerdem wird eine Synchronisation aller Uhren durch die sog. „Einstein-Synchronisation“ vorausgesetzt. [6]

2.3 Test-Theorie nach Mansouri und Sexl

In der Test-Theorie von Mansouri und Sexl wird die Lorentz-Transformation noch weiter verallgemeinert. Zusätzlich zu den in Robertson gemachten Verallgemeinerungen wird nun auch die Synchronisation von Uhren durch einen weiteren Parameter ϵ charakterisiert.

Die Lorentz-Transformationen sind bei Mansouri/Sexl folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned}T &= a \cdot t + \epsilon \cdot X \\X &= b \cdot (x - v \cdot t) \\Y &= d \cdot y \\Z &= d \cdot z\end{aligned}$$

Diese Formulierung ist somit gleichbedeutend mit folgender Formulierung in der Schreibweise von Robertson:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{a_0} \\b &= \frac{\gamma^2}{a_1} \\d &= \frac{1}{a_2} \\\epsilon &= \frac{-a_1}{a_0} \cdot \frac{v}{c^2}\end{aligned}$$

Weiterhin lassen sich die Terme a, b und d folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}a &= 1 + \alpha \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots \\b &= 1 + \beta \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots \\d &= 1 + \delta \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots\end{aligned}$$

In der Speziellen Relativitätstheorie müssen diese Parameter dann die folgenden Wert annehmen:

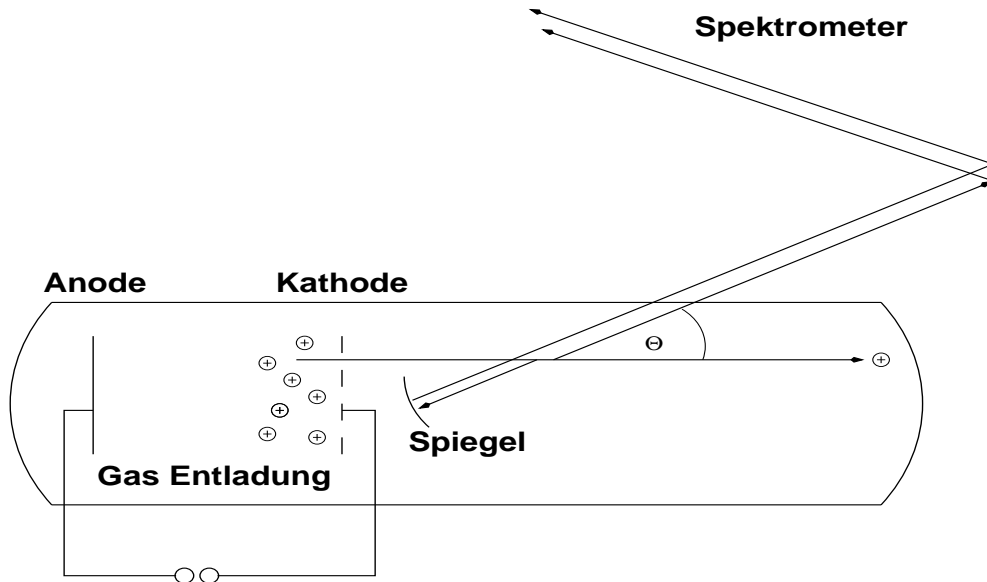
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{1}{2} \\ \delta &= 0\end{aligned}$$

Der grundlegende Unterschied in beiden Test-Theorien ist der, daß die Parameter α , β und δ völlig unabhängig von der Geschwindigkeit sind. Bei der Robertson'schen Theorie müßte streng genommen für jede Geschwindigkeit die Gültigkeit der Relativitätstheorie geprüft werden. Auf der anderen Seite ist es sehr viel unhandlicher, die Theorie von Mansouri/Sexl auf ein Experiment zu übertragen. Eine direkte Deutung eines Experiments im Sinne der Test-Theorien ist sehr viel einfacher mit den Parametern g_0 , g_1 und g_2 . [6]

3 Experimente

3.1 Ives, Stilwell (1938)

Eine erste Untersuchung des transversalen Doppler-Effekt haben H. E. Ives und G. R. Stilwell 1938 vorgenommen [12]. Dabei wurden in einer Entladungsröhre Kanalstrahlen beobachtet.



Aus der Kathode treten Elektronen aus. Diese werden durch das elektrische Feld zur Anode hin beschleunigt. Ein Großteil des Potentials fällt direkt vor der Kathode, dem sogenannten Kathodenfall, an. Haben die Elektronen genügend Energie aufgenommen, so können sie das Gas ionisieren. Die Ionen werden nun ihrerseits wiederum zur Kathode beschleunigt. Wird die Kathode nun mit Löchern versehen, so können die Ionen durch sie hindurch in den Rückraum der Entladungsröhre eintreten. Diese Ionenstrahlen werden Kanalstrahlen oder auch „canal rays“ genannt.

Die Beobachtung der Kanalstrahlen erfolgt nun mithilfe eines Spiegels unter einem kleinen Winkel Θ nahezu parallel und antiparallel zur Bewegungsrichtung der Ionen. Somit sieht man sowohl die zu höheren Frequenzen verschoben Doppler-Linien, als auch die zu niedrigeren verschobenen. Aus dem Abstand beider Linien zur unverschobenen Linie lassen sich sowohl der quadratische als auch der lineare Anteil des Doppler-Effektes berechnen.

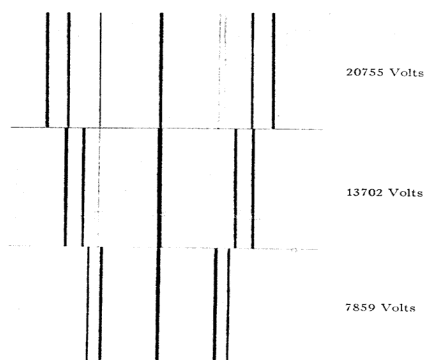


FIG. 9. Spectrograms obtained for several applied voltages.

In der Abbildung links sieht man eine Photographie eines so aufgenommenen Spektrums. Deutlich erkennbar ist die Abhängigkeit der Aufspaltung von dem angelegten Potential: je größer die Spannung, desto größer ist die Geschwindigkeit der Ionen, desto größer ist der Doppler-Shift.

Schwierigkeiten ergeben sich hierbei insbesondere dadurch, daß man die Geschwindigkeit der Ionen und damit das elektrische Potential und die stoßenden Gasteilchen genau kennen muß.

Außerdem sorgt die Divergenz des Teilchenstrahls, z.B. durch eine überlagerte thermische Bewegung, für eine Winkelveränderung. Ebenso ist eine hohe spektrale Auflösung des Spektrometers erforderlich, da die zu erwartenden Effekte sehr klein sind. Trotz der vielen systematischen Fehlerquellen konnte der transversale Doppler-Effekt mit einer Genauigkeit vom etwa 3% nachgewiesen werden.

In der rechten Abbildung sieht man den quadratischen Anteil des Doppler-Effekts aufgetragen über dem linearen Anteil. Die gestrichelte Kurve entspricht den theoretisch berechneten Werten.

Besonders schön an diesem Versuch ist, daß dieses das erste *Positiv*-Experiment zur Bestätigung der Speziellen Relativitätstheorie ist. Alle anderen Versuche — wie z.B. das Michelson-Experiment — waren bis dato *Negativ*-Experimente.

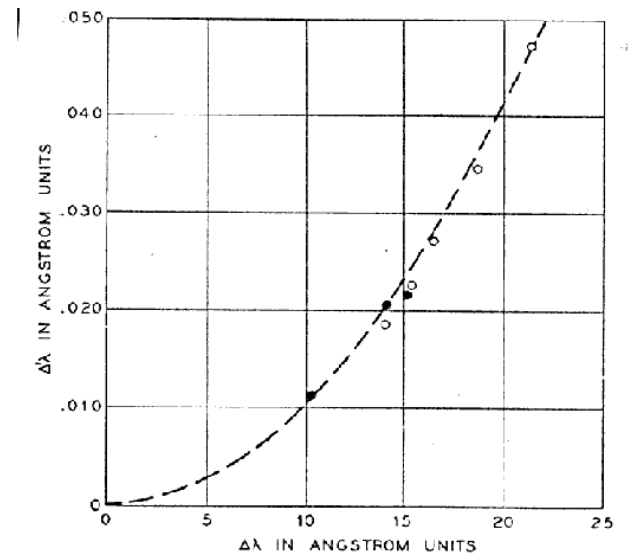
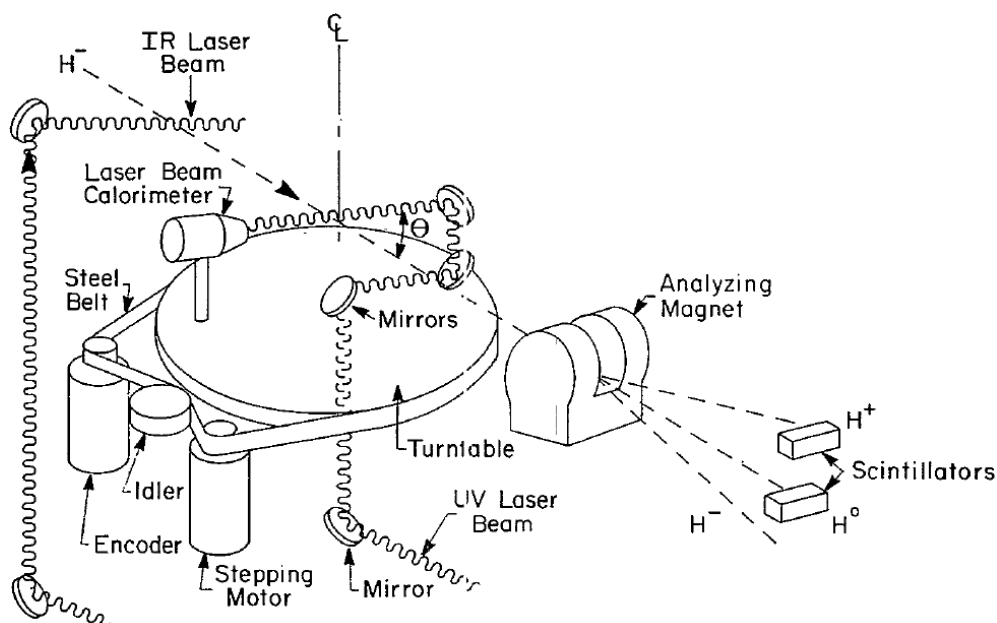


FIG. 14. Computed and observed second-order shifts, plotted against first-order (Doppler) shifts.

3.2 MacArthur, et al.(1986)

Zur Bestimmung des transversalen Doppler-Effekts wurde 1986 ein Teilchenstrahl aus neutralem Wasserstoff mit einem Laser gekreuzt[7]. Abhängig vom Winkel konnte die Energie des Lasers den Wasserstoff anregen. Aus den bekannten Linien des Wasserstoffs und den gemessenen Winkeln konnte der relativistische Doppler-Effekt überprüft werden.



Ein aus einem Linear-Beschleuniger mit etwa 800 MeV austretender Teilchenstrahl von H^- -Ionen wird zunächst durch einen Infrarot-Laser neutralisiert. Ein weiterer Laser, der im

UV-Bereich arbeitet, kreuzt nun den Weg des Teilchenstrahls. Der Laser besitzt eine Energie von 4.7 eV. Über ein Spiegelsystem, welches über einen Schrittmotor gesteuert wird, kann der Winkel, unter dem sich Laser und Wasserstoff treffen, komplett durchgeföhren werden. Nachdem der Teilchenstrahl den Laser passiert hat, gelangt er weiter zu einem Analysator-Magneten, der aus einem Gradientenfeld besteht. Wurde ein Wasserstoff-Atom von dem UV-Laser angeregt, so kann es durch Feldionisation im Analysator-Magneten ionisiert werden. Da es sich aber nun wieder um geladene Teilchen handelt, wird ihre Flugbahn im Magnetfeld von der ursprünglichen Bahn abgelenkt. Mithilfe von Szintillatoren kann hinter dem Magneten gemessen werden, wieviele Teilchen ihre ursprüngliche Bahn verlassen haben und somit vom UV-Laser angeregt worden sind.

Klassisch gilt zunächst für die Doppler-Verschiebung der eingestrahnten Frequenz ω_0 :

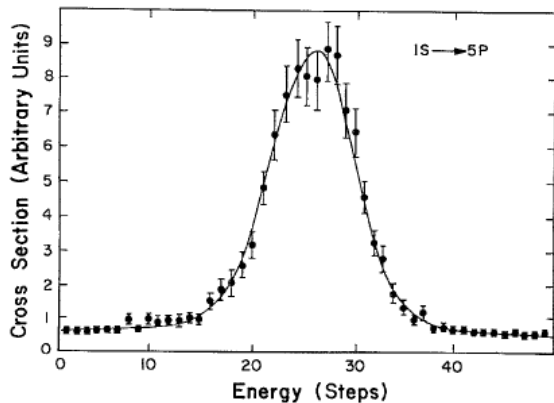
$$\begin{aligned}
 \omega'_{klass} &= \omega_0 - \underline{k} \cdot \underline{v} \\
 &= \omega_0 - |\underline{k}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \Theta \\
 &= \omega_0 - k \cdot v \cdot \cos \Theta \\
 &= \omega_0 - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot \cos \Theta \\
 &= \omega_0 - \frac{2\pi\nu}{c} \cdot v \cdot \cos \Theta \\
 &= \omega_0 - \omega_0 \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \Theta \\
 &= \omega_0 \cdot (1 - \beta \cdot \cos \Theta)
 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der hohen Geschwindigkeit ($\beta \approx 0.84$) ergibt sich nun relativistisch:

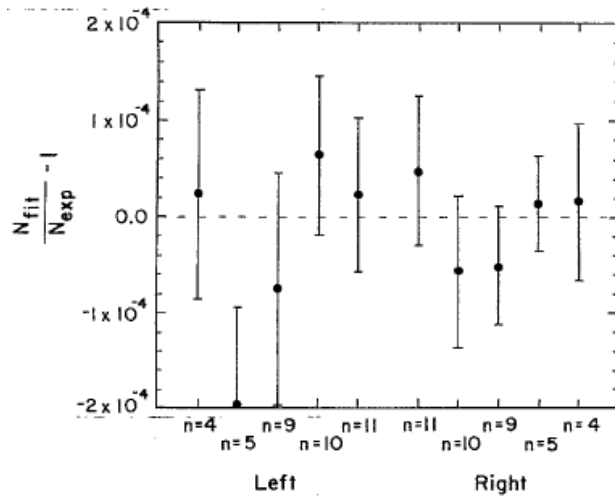
$$\omega'_{rel} = \frac{\gamma}{g_0} \cdot \omega_0 \cdot (1 - \beta \cdot \cos \Theta)$$

Somit ergibt sich für die Energie, die zur Anregung des n-ten Niveaus des Wasserstoffs benötigt wird, der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 E_n &= \hbar \cdot \omega' = \frac{E_0}{g_0} \cdot \gamma \cdot (1 - \beta \cdot \cos \Theta) \\
 E_0 &= \hbar \cdot \omega_0
 \end{aligned}$$



Der Winkel Θ wird gemessen, die Größen E_n , E_0 , β und γ sind bekannt. Daraus läßt sich nun also g_0 bestimmen. In der nebenstehenden Abbildung sieht man eine so gemessene Dopplerkurve für den Übergang $1s \rightarrow 5p$. Die Energie, die abhängig vom Winkel ist, ist hier in „Steps“ angegeben, also in den Schrittmotor-Schritten, die die Siegelapartur dreht.



In der nebenstehende Abbildung sieht man die relative Abweichung des berechneten Winkels vom gemessenen, aufgetragen jeweils für die verschiedenen Übergänge, die vermessen wurden. Auch hier wurde der Winkel wieder in Einheiten des Schrittmotors angegeben. Man sieht, daß die Fehler größtenteils in einem Bereich von etwa $4 \cdot 10^{-4}$ liegen.

Die einzelnen Meßgrößen waren dabei mit den folgenden Fehlern behaftet: Der Winkel konnte über den Schrittmotor auf $30.2 \mu\text{rad}$ genau eingestellt werden. Die Geschwindigkeit der beschleunigten Wasserstoff-Atome war bis auf $\beta = 0.84 \pm 0.69 \cdot 10^{-4}$ genau bekannt. Dieses entspricht einer Energieunsicherheit von $\pm 0.1 \text{ MeV}$. Der UV-Laser war mit einer Unsicherheit von $\pm 0.79 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ behaftet.

Unter Berücksichtigung dieser Fehler konnte die Spezielle Relativitätstheorie auf einen Wert von $g_0 = 1.00004 \pm 2.7 \cdot 10^{-4}$ bestätigt werden.

Anmerkung zu diesem Experiment:

Da bei diesem Experiment der Laserstrahl gedreht wird, ist dieses Experiment anfällig für eine mögliche Anisotropie der Lichtgeschwindigkeit, welche streng genommen noch zusätzlich berücksichtigt werden müßte. Würde man den Teilchenstrahl drehen und stattdessen den Laser in einer festen Raumrichtung halten, würde man dieses Problem umgehen. Allerdings würde sich so ein Vorgehen nur schwer in die Praxis umsetzen lassen.

Eine andere Möglichkeit, eine mögliche Anisotropie ausschließen zu können, ist dadurch gegeben, daß in diesem Experiment der Winkel von 0 bis 2π komplett durchgefahen wird. Dadurch existiert zu jedem möglichen Fehler unter einem Winkel Θ ein genau entgegengesetzter Fehler bei $\Theta + \pi$, da dort der Lichtstrahl in genau entgegengesetzter Richtung läuft und somit die genau entgegengesetzte Anisotropie erfahren würde. Dadurch würden sich Fehler herausmitteln.

Nimmt man noch zusätzlich den Negativ-Ausgang eines vorangegangenen Michelson-Morley-Experiments hinzu, so kann eine mögliche Anisotropie des Lichts vernachlässigt werden.

3.3 Juncar, et al. (1985)

Anstatt den kompletten Winkel von 0 bis 2π zu vermessen, reicht es aus, parallel und antiparallel zu einem bewegten Teilchenstrahl zu messen, dessen Energie-Niveaus bekannt sind. Stimmt die dopplerverschobene Frequenz mit der Anregungsenergie des Teilchens überein, so kann Absorption beobachtet werden.

In diesem Fall gilt nach der Speziellen Relativitätstheorie folgendes:

$$\nu' = \nu \cdot \gamma \cdot (1 - \beta \cdot \cos \vartheta)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \nu'_+ &= \nu \cdot \gamma \cdot (1 + \beta) & (\vartheta = \pi) \\ \nu'_- &= \nu \cdot \gamma \cdot (1 - \beta) & (\vartheta = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nu'_+ \cdot \nu'_- &= \nu^2 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \beta) \cdot (1 + \beta) \\ &= \nu^2 \cdot \gamma^2 \cdot (1 - \beta^2) \\ &= \nu^2 \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)} \cdot (1 - \beta^2) \\ &= \nu^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\nu'_+ \cdot \nu'_-} = \nu$$

Wenn die Spezielle Relativitätstheorie also korrekt ist, muss sich die Wellenzahl $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$ eines Übergangs folgendermaßen berechnen lassen:

$$\sigma_{0,rel} = \sqrt{\sigma_+ \cdot \sigma_-}$$

Analog müsste, falls stattdessen der klassische Fall korrekt ist, gelten:

$$\sigma_{0,klass} = \frac{2\sigma_+ \sigma_-}{(\sigma_+ + \sigma_-)}$$

Durch messen der Wellenzahl in paralleler und in antiparalleler Richtung läßt sich also überprüfen, welcher der beiden Rechenwege der richtige ist, wenn σ_0 bekannt ist.

In folgenden Experiment [17] wurden nun die Absorptionslinien eines Teilchenstrahls von Wasserstoffatomen mit einem Fabstofflaser parallel und antiparallel zur Bewegung vermessen.

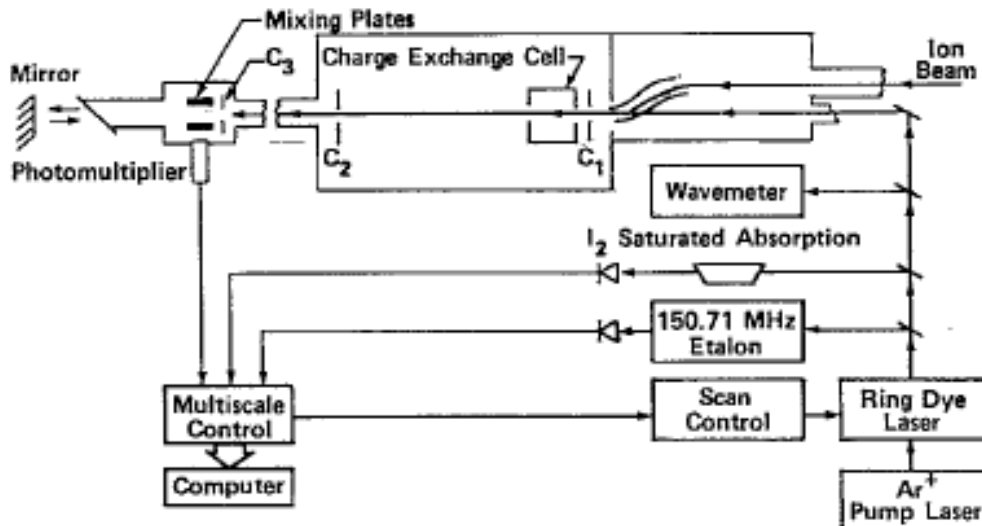
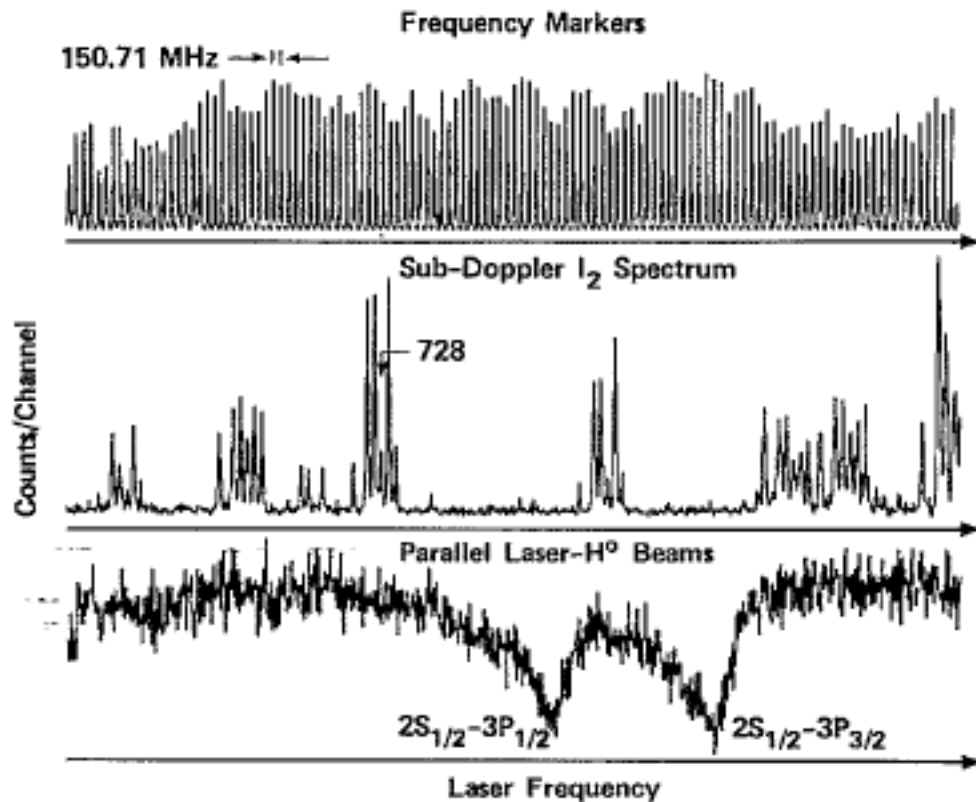


FIG. 1. The UNISOR laser facility.

Zusätzlich wurde mit dem Farbstofflaser eine Sättigungs-Spektroskopie an einer Jod-Zelle vorgenommen. Durch die gleichzeitige Aufzeichnung des Jod-Spektrums erhält man einige sehr genauen Referenzlinien, die weitestgehend bekannt sind. Außerdem wurde der Laser noch durch ein Etalon⁴ geschickt und auch dieses Signal aufgezeichnet. Das Etalon ließ Licht bei Frequenzen von 150.71 MHz und Vielfachen passieren. Dadurch erzeugt man sich zusätzlich noch eine direkte Skalierung in dem aufgezeichneten Absorptions-Spektrum des Wasserstoffs.

In der Abbildung unten sieht man eine typische Messung. Im untersten Diagramm sind die Absorptionslinien des Wasserstoffs der beiden $1s \rightarrow 3p$ Übergänge zu sehen. In der Mitte befindet sich das Referenz-Spektrum der Jod-Zelle und in der obersten Auftragung sind die äquidistanten Linien des Etalons zu erkennen.



Typische Messwerte waren $\sigma_+ = 15\,394.6640\text{ cm}^{-1}$ und $\sigma_- = 15\,073.5334\text{ cm}^{-1}$. Daraus ergaben sich die folgenden Werte für die unverschobene Linie:

$$\begin{aligned}\sigma_{0,rel} &= 15\,233.2549 \pm 0.0010\text{ cm}^{-1} \\ \sigma_{0,klass} &= 15\,232.4093 \pm 0.0010\text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

Die unverschobene Linie des ruhenden Wasserstoff-Atoms liegt bei $\sigma_0 = 15\,233.25673(5)\text{ cm}^{-1}$. Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem Wert für $\sigma_{0,rel}$.

Abweichungen bei der Einstellung des Winkels zwischen Laser und Teilchenstrahl ergaben eine Unsicherheit in der gemessenen Wellenzahl von $2 \cdot 10^{-4}\text{ cm}^{-1}$. Als Referenzlinie dienten die Jod-Linien 728 und 194, deren Unsicherheiten mit $10 \cdot 10^{-4}\text{ cm}^{-1}$ und $20 \cdot 10^{-4}\text{ cm}^{-1}$ angegeben waren. Die Genauigkeit der gemessenen Absorptionslinien σ_+ und σ_- wurde mit $25 \cdot 10^{-4}\text{ cm}^{-1}$ angegeben. Driften in der Beschleunigungs-Spannung des Ionen-Strahls

⁴Bei einem Etalon handelt es sich im wesentlichen um ein Fabry-Perot-Interferometer.

gingen mit $11 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$ in die Rechnung ein. Der daraus resultierende Gesamtfehler wurde mit 0.0035 cm^{-1} angegeben.

Damit konnte die Spezielle Relativitätstheorie bis auf einen relativen Fehler von $5 \cdot 10^{-3}$ bestätigt werden.

Anmerkungen zu diesem Experiment:

Die Messung in diesem Versuch ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Teilchenstrahls und kann prinzipiell bei jeder Geschwindigkeit durchgeführt werden, ohne daß diese bekannt ist. Die Teilchengeschwindigkeit geht in die Rechnung nicht ein. Dennoch muß eine eventuelle Drift in der Geschwindigkeit berücksichtigt werden, da die Messung zuerst in paralleler und anschließend in antiparalleler Richtung erfolgt. Zwischen diesen beiden Messungen kann die Beschleunigungs-Spannung der Ionen-Quelle schwanken.

Weiterhin ist noch zu bemerken, daß obige Rechnung alle Ordnungen der Speziellen Relativitätstheorie enthält, nicht nur die quadratischen.

3.4 Zwei-Photonen-Absorption (TPA)

Im letzten Experiment wurden zwei Messungen, einmal in paralleler und einmal in antiparalleler Richtung, nacheinander durchgeführt. Was passiert aber nun, wenn wir genau diese beiden Messungen *gleichzeitig* durchführen?

Es läßt sich zeigen, daß die zwei entgegenlaufenden Lichtwellen sich wie ein einziges stehendes Lichtfeld verhalten können.

Aus der Atomphysik wissen wir, daß ein Lichtquant von einem Atom dann, und nur dann absorbiert werden kann, wenn seine Energie $E_{\text{photon}} = \hbar\omega_0$ mit Anregungsenergie $E_{\text{atom}} = E_2 - E_1$ des anzuregenden Zustands exakt übereinstimmt. Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit für einen Übergang. Auch zwei Photonen können gleichzeitig absorbiert werden, wenn die Summe ihrer Energien wiederum mit der Anregungsenergie des Übergangs übereinstimmt. Der Absorptionskoeffizient für einen solchen Übergang ist gegeben durch:

$$\alpha = \sigma_{TPA} \cdot \frac{n}{\hbar\omega_0} \cdot I$$

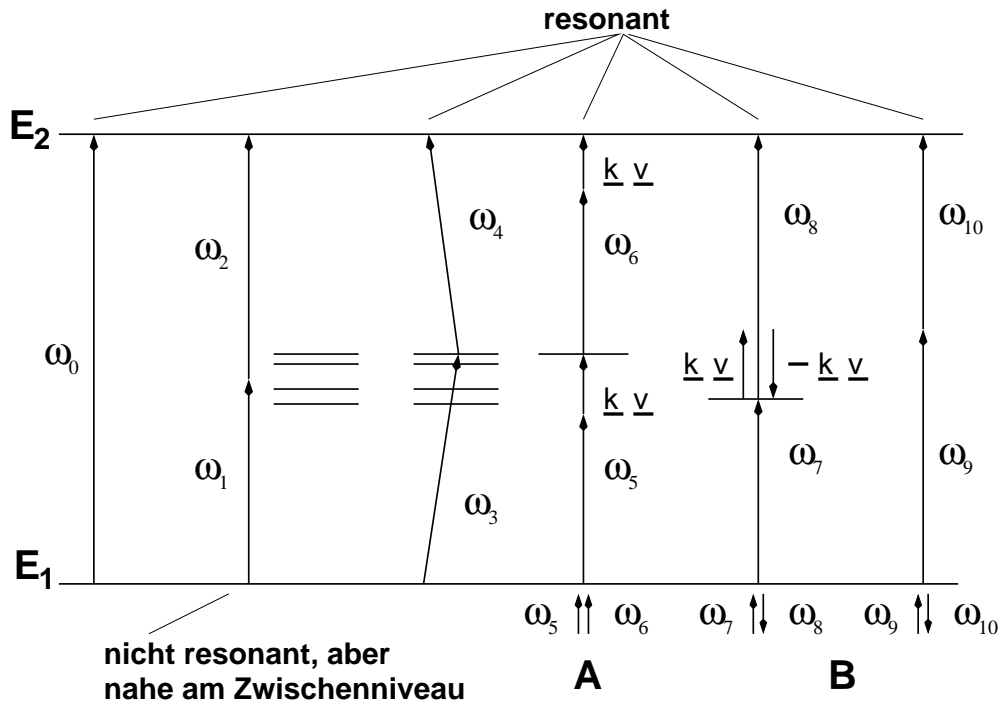
Hierbei sind I die Intensität des Lichtfeldes, σ_{TPA} der Wirkungsquerschnitt für den Zwei-Photonen-Übergang, ω_0 die Frequenz der Lichtwelle und n die Dichte der absorbierenden Teilchen. Wichtig hierbei ist die Abhängigkeit von der Intensität I des Wellenfeldes: je größer die Intensität, desto mehr Photonen treffen pro Zeitintervall auf das Atom. Die Wahrscheinlichkeit, daß genau so viele Photonen *zur selben Zeit* beim Atom für den Übergang bereitstehen wie auch benötigt werden, steigt mit der Intensität an.

Die quantentheoretische Behandlung dieses Phänomens ist sehr kompliziert, es müssen sowohl die speziellen Übergänge des Atoms berücksichtigt werden, als auch der Einfluß der starken elektrischen Felder der Lichtwelle, die durch die hohe Intensität zustande kommen.

Festzuhalten ist, daß zwei Photonen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 gleichzeitig von einem Atom absorbiert werden können, wenn die Übergangsenergie der Summenenergie der Photonen entspricht:

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_1$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Übergang steigt an, wenn sich in der Nähe der einzelnen Photonenenergien ein weiteres Zwischenniveau befindet. Dieses braucht *nicht resonant* mit den Energien der einzelnen Photonen zu sein, es kann sich auch um einen *virtuellen* Zustand handeln.



Betrachten wir nun zusätzlich noch den Doppler-Effekt (zunächst klassisch) für einen solchen Zwei-Photonen-Übergang an einem bewegten Atom. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die beiden Lichtwellen sind parallel zueinander (Fall A). Der Doppler-Effekt hat für beide Photonen dasselbe Vorzeichen:

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \hbar \cdot (\omega_5 + k \cdot v + \omega_6 + k \cdot v) \\ &= \hbar \cdot (\omega_5 + \omega_6 + 2 \cdot k \cdot v) \end{aligned}$$

2. Die Lichtwellen laufen antiparallel (Fall B), also in entgegengesetzte Richtungen. Der Doppler-Effekt hat somit für beide Lichtwellen ein anderes Vorzeichen. Da beide Lichtwellen aber wie eine einzige, stehende Welle agieren, ist es somit möglich, daß sich beide Doppler-Verschiebungen eliminieren:

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= \hbar \cdot (\omega_9 + \omega_{10}) \\ &= \hbar \cdot [(\omega_7 + k \cdot v) + (\omega_8 - k \cdot v)] \\ &= \hbar \cdot (\omega_7 + \omega_8 + \underbrace{k \cdot v - k \cdot v}_0) \\ &= \hbar \cdot (\omega_7 + \omega_8) \end{aligned}$$

Es ist also möglich, lineare Terme durch entgegengesetztes Einstrahlen zu eliminieren. Die zusätzlichen relativistischen Terme in quadratischer oder vierter Ordnung (oder auch höher) heben sich nicht auf. Durch eine Zwei-Photonen-Spektroskopie kann also der relativistische Anteil des Doppler-Effekts direkt gemessen werden.

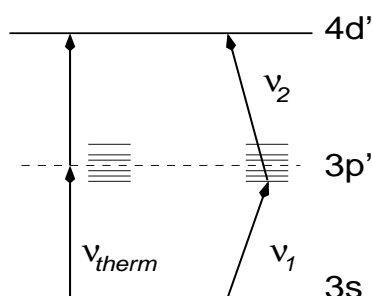
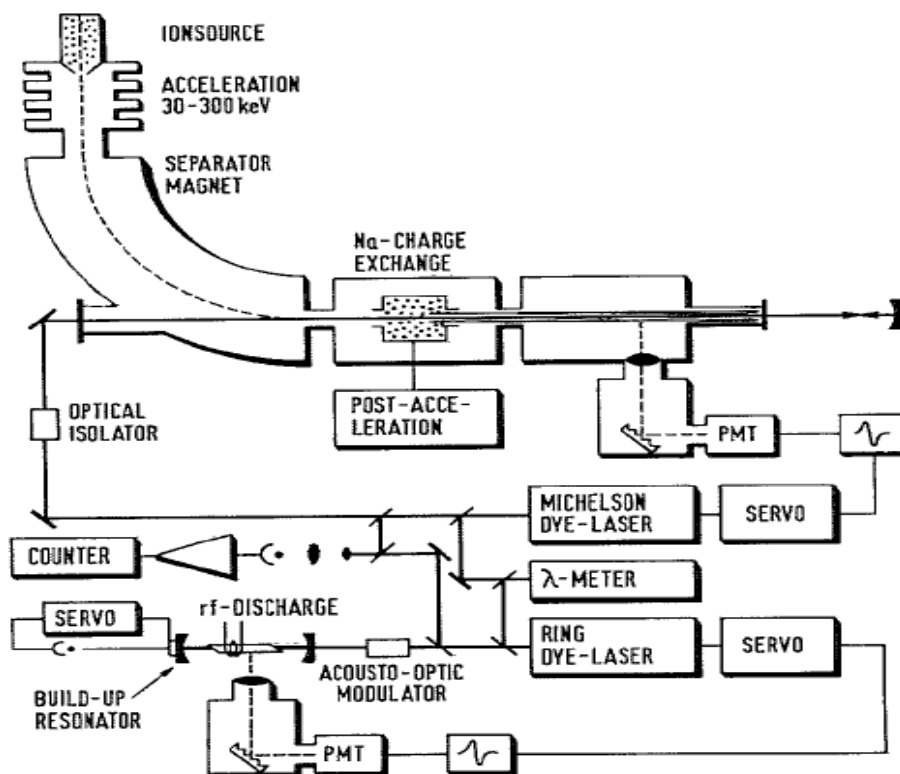
3.5 Kaivola, et al.(1985)

Im Experiment von Kaivola [16] wurde mithilfe der Zwei-Photonen-Spektroskopie der quadratische Anteil des Doppler-Effektes sowohl in thermischem als auch an schnellem Neon gemessen und verglichen.

Neon-Ionen werden in einem Beschleuniger auf eine Energie von etwa 120 keV ($\beta \approx 0.0032$) gebracht. Dieser Ionen-Strahl wird in Natrium-Dampf neutralisiert. Parallel zur Bewegungsrichtung des Neons wird nun ein Laser eingestrahlt, der anschließend in sich selbst reflektiert wird. Die Frequenz des Lasers ist so gewählt, daß durch die Doppler-Verschiebung die hinlaufende Welle ν_1 mit dem $3s_{\frac{3}{2}} \rightarrow 3p'_{\frac{3}{2}}$ Übergang, und die rücklaufende Welle ν_2 mit dem $3p'_{\frac{3}{2}} \rightarrow 4d'_{\frac{5}{2}}$ Übergang des Neons in dessen Ruhesystem übereinstimmt.

Die Absorption des Lasers wird über die dabei entstehende Fluoreszenz gemessen. Die Frequenz wird automatisch nachgeregelt, falls sie aus der Resonanz des Übergangs driftet.

Derselbe Übergang ($3s_{\frac{3}{2}} \rightarrow 4d'_{\frac{5}{2}}$) wird mit einem zweiten Laser in einer thermischen Entladungszelle angeregt. Hier wird ebenfalls sowohl parallel als auch antiparallel eingestrahlt. Jedoch ist hier der Zwei-Photonen-Übergang nicht mehr resonant mit dem $3p'$ -Zwischenniveau. Auch an dieser Stelle findet eine Regelung statt, die verhindert, daß der Laser aus der Resonanz driftet.



Ebenso wie in Abschnitt 3.3 (Seite 14) gilt auch hier für die Resonanzfrequenz des schnellen Neons: $\nu_{rel} = \sqrt{\nu_1 \cdot \nu_2}$. Gleichfalls muß auch hier die Geschwindigkeit der Teilchen nicht explizit bekannt sein. Im thermischen Neon liegt das virtuelle Zwischenniveau in der Nähe des $3p'$ -Niveaus. Für die eingestrahlte Frequenz des Lasers muß somit gelten: $\nu_{therm} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$.

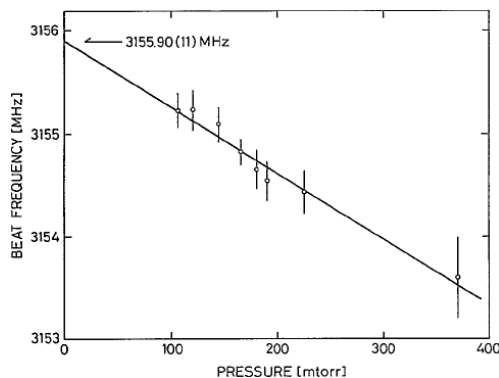
Für die Übergänge zwischen den einzelnen Niveaus gilt:

$$\sigma_1 = \frac{\nu_1}{c} = 16\,816.666(2) \text{ cm}^{-1}$$

$$\sigma_2 = \frac{\nu_2}{c} = 16\,937.3862(10) \text{ cm}^{-1}$$

Demzufolge kann man einen Doppler-Shift von $\nu_{therm} - \nu_{rel} = 3235.89 \pm 0.05$ MHz erwarten.

Um nun die Abweichung der Übergänge in den verschiedenen Systemen zu bestimmen, werden beide Laserwellen überlagert und in ein separates Meßgerät gegeben. Die durch die Überlagerung entstehende Schwebungsfrequenz kann nun gemessen werden.



Weiterhin ist zu beachten, daß in der thermischen Entladung auch eine Verbreiterung aufgrund des Drucks vorliegt. Diese kann gemessen und nach Null extrapoliert werden. Die aus der Druckverbreiterung stammende Unsicherheit, welche zugleich auch die größte systematische Fehlerquelle darstellte, war mit 0.11 MHz angegeben.

Als weitere Fehlerquellen wurden ein AC-Stark-Shift von 0.04 ± 0.02 MHz angegeben, sowie eine Ungenauigkeit der Laser-Locks auf den TPA-Übergang von ± 0.04 MHz, Winkelunsicherheiten von ± 0.02 MHz, Magnetfeld-Störungen von ebenfalls ± 0.02 MHz und Driften der Beschleuniger-Spannung von ± 0.05 MHz.

Insgesamt ergab sich damit ein gemessener Doppler-Shift von

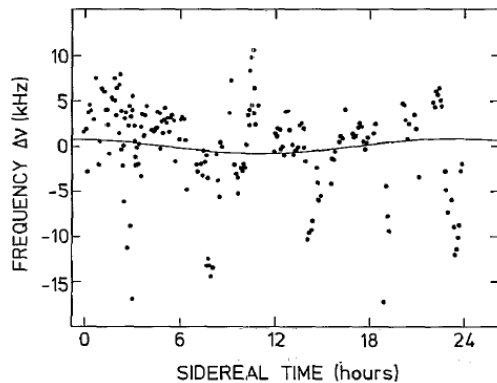
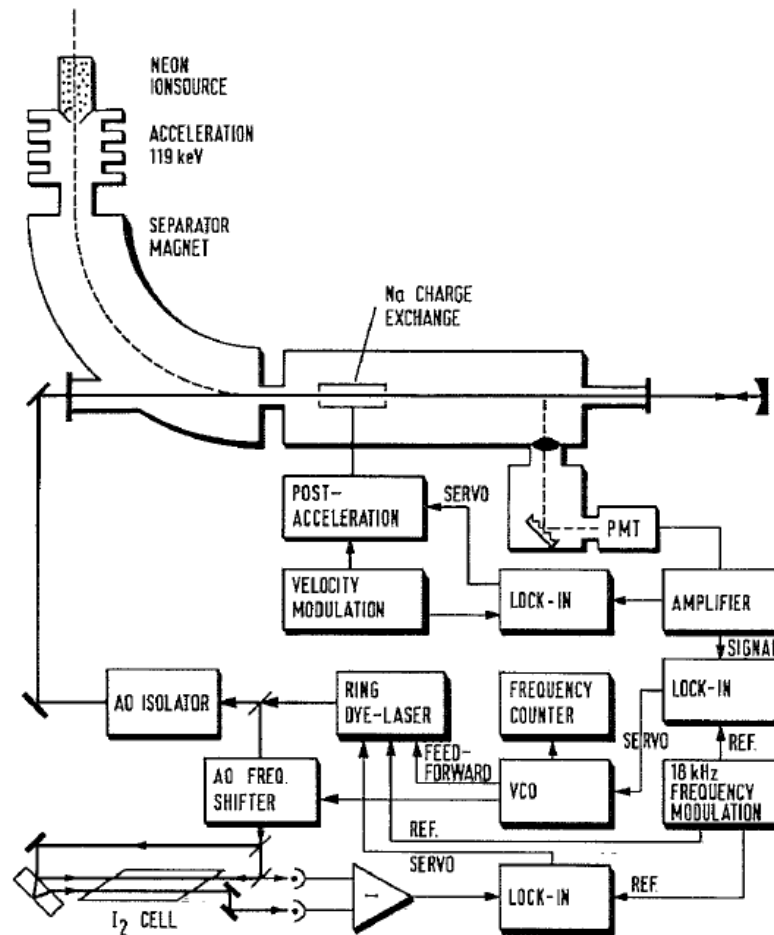
$$\nu_{rel} = 3235.94 \pm 0.14 \text{ MHz}$$

Dieser Wert stimmt mit dem berechneten bis auf einen relativen Fehler von $4 \cdot 10^{-5}$ überein.

3.6 Riis, et al. (1988)

Im vorigen Experiment wurde die Doppler-Verschiebung von schnellem mit der von langsamem Neon verglichen. Da dort die größte Unsicherheit in der Druckverbreiterung der thermischen Messung lag, wurde 1988 dieses Experiment in modifizierter Form von Riis et al. [9] nochmals durchgeführt. Um den Fehler der thermischen Messung zu eliminieren, wurde statt der Neon-Zelle eine Iod-Zelle genommen, an der nun eine Sättigungs-Spektroskopie durchgeführt wurde. Der restliche Aufbau des Experiments unterscheidet sich nicht wesentlich von dem vorherigen. Lediglich die Messung des thermischen Übergangs wurde hierbei komplett weggelassen.

Neon-Ionen werden auf eine Energie von 119 keV beschleunigt und neutralisiert. Ein auf den $3s_{\frac{3}{2}} \rightarrow 3p'_{\frac{3}{2}} \rightarrow 4d'_{\frac{5}{2}}$ TPA-Übergang fest eingestellter und aktiv stabilisierter Laser wurde parallel eingestrahlt und in sich reflektiert. Mit demselben Laser wurde nun gleichzeitig eine Sättigungs-Spektroskopie in einer Iod-Zelle vorgenommen.



In der nebenstehenden Abbildung sieht man die Abweichung der gemessenen von der erwarteten Doppler-Verschiebung. Die Abweichungen liegen alle innerhalb von ± 15 kHz, was angesichts der Absolutfrequenz von etwa 3 GHz sehr gering ist. Die Messung selbst wurde über einen Zeitraum von mehreren Tagen durchgeführt. Die eingezeichnete Linie ist ein Fit, der im wesentlichen einen Kosinus beschreibt, in dem die Erdrotation berücksichtigt wurde (siehe Anmerkung).

Größter Unsicherheitsfaktor waren hier die eingestellten Winkel zwischen Laserstrahl und Atom-Strahl. Die Abweichung wurde mit 10^{-4} rad angegeben. Die Divergenz des Teilchenstrahls war mit $3 \cdot 10^{-5}$ rad beziffert. Desweiteren gab es Driften in der Beschleuniger-Spannung, die mit 70 mV (rms) angegeben waren. Eine Abweichung von 1 V in der Spannung ergab einen Frequenzverstimmung von 27 kHz.

Insgesamt wurde die Abweichung von der Speziellen Relativitätstheorie mit $1.4 \cdot 10^{-6}$ angegeben.

Anmerkungen zu diesem Experiment

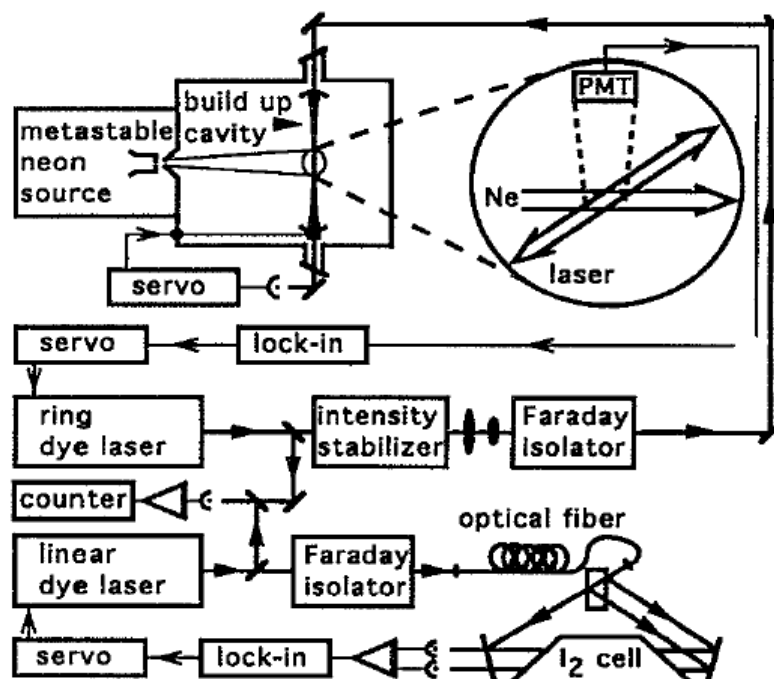
Dieses Experiment wurde ursprünglich mit einem etwas anderen Hintergrund durchgeführt: Riis wollte mit seinem Experiment eine neue Obergrenze für eine mögliche Anisotropie bestimmen. Die Messung lief über einen Zeitraum von mehreren Tagen, dadurch sollte die Erdrotation im Vergleich zum Bezugssystem der Fixsterne in die Messung eingehen. Deswegen wurde der Fit in der obigen Abbildung auch mit einem Kosinus mit einer Periode von 24 h angesetzt. Die so bestimmte Abweichung von der Isotropie wurde mit einer Genauigkeit von $\frac{\Delta c}{c} \leq 3 \cdot 10^{-9}$ angegeben. Doch durch die Art des Experiments kann bei diesem Vorgehen keine Anisotropie gemessen werden: aufgrund der Zwei-Photonen-Absorption wird eine mögliche Anisotropie in die eine Richtung durch dieselbe Anisotropie in die andere Richtung kompensiert [21].

Dennoch, die hohe Genauigkeit des gemessenen Doppler-Shifts bleibt davon unberührt.

3.7 McGowan, et al. (1993)

Die konsequente Fortsetzung des Experiments von Riis wurde 1993 von McGowan [19] durchgeführt. Dazu wurde zusätzlich der noch fehlende Zwei-Photonen-Übergang in thermischem Neon gemessen, so daß beide Experimente zusammen wieder so zu interpretieren sind wie in Abschnitt 3.5 beschrieben. Dieser TPA-Übergang im thermischen Neon wurde nun wieder auf eine Jod-Zelle bezogen, die exakt mit der aus dem Experiment von Riis übereinstimmte.

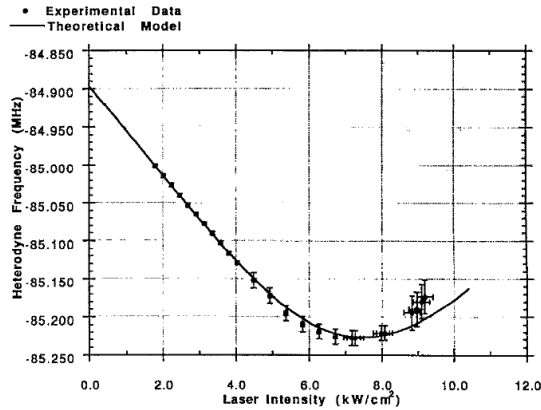
Für die Zwei-Photonen-Absorption benutzte McGowan den Übergang $1s_5 \rightarrow 2p_4 \rightarrow 4s_1'''$, welcher im thermischen Fall wiederum nicht resonant mit dem $2p$ -Zwischen-Niveau ist.⁵



Ein Laser wurde exakt auf den Referenz-Übergang in der Jod-Zelle eingestellt, welcher auch bei Riis in der Jod-Zelle vermessen wurde. Ein zweiter Laser wurde nun auf den Zwei-

⁵Aus dem Artikel von McGowan wird leider nicht ganz klar, ob Riis in seinen Arbeiten den Übergang $1s \rightarrow 2p \rightarrow 4s'''$ auch vermessen hat (im zitierten Artikel wird nur der Übergang $3s \rightarrow 3p' \rightarrow 4d'$ erwähnt), oder ob McGowan das Experiment von Riis mit diesem Übergang wiederholt hat.

Photonen-Übergang im thermischen Neon eingestellt. Beide Laser wurden überlagert, und die daraus resultierende Schwebungsfrequenz wurde gemessen.



Da aufgrund des eingestrahelten Lasers das System des thermischen Neons gestört wurde, wurde die Messung bei verschiedenen Laser-Intensitäten durchgeführt und nach Null extrapoliert. Zu berücksichtigen waren der AC-Stark-Effekt und die Entleerung des ursprünglichen Zustands, da nur etwa 10% der angeregten Atome in ihren Ausgangszustand zurückkehrten. Im wesentlichen gab es zwei AC-Stark-Komponenten, die die Frequenz jeweils in entgegengesetzte Richtung verschoben.

Aufgrund unterschiedlicher Wahrscheinlichkeiten dieser Komponenten, wurde bei geringerer Intensität nur eine der beiden angeregt und somit aus dem ursprünglichen Zustand entfernt. Bei höherer Intensität wurde die Verschiebung in die entgegengesetzte Richtung durch die zweite, noch übrige Komponente dominant.

Die Unsicherheiten aufgrund der Laser-Intensität waren mit ± 0.0035 MHz angegeben, die exakte Einstellung der Laser mit ± 0.005 MHz. Für die Messung im schnellen Neon nach Riis waren Ungenauigkeiten von ± 0.0027 MHz aufgrund der Winkelungenauigkeit, ± 0.0015 MHz durch Driften in der Spannung, ± 0.003 MHz durch die Ionen-Quelle, ± 0.001 MHz durch die Akusto-Optische-Modulation und ± 0.0012 MHz durch die Unsicherheiten der Jod-Zelle angegeben.

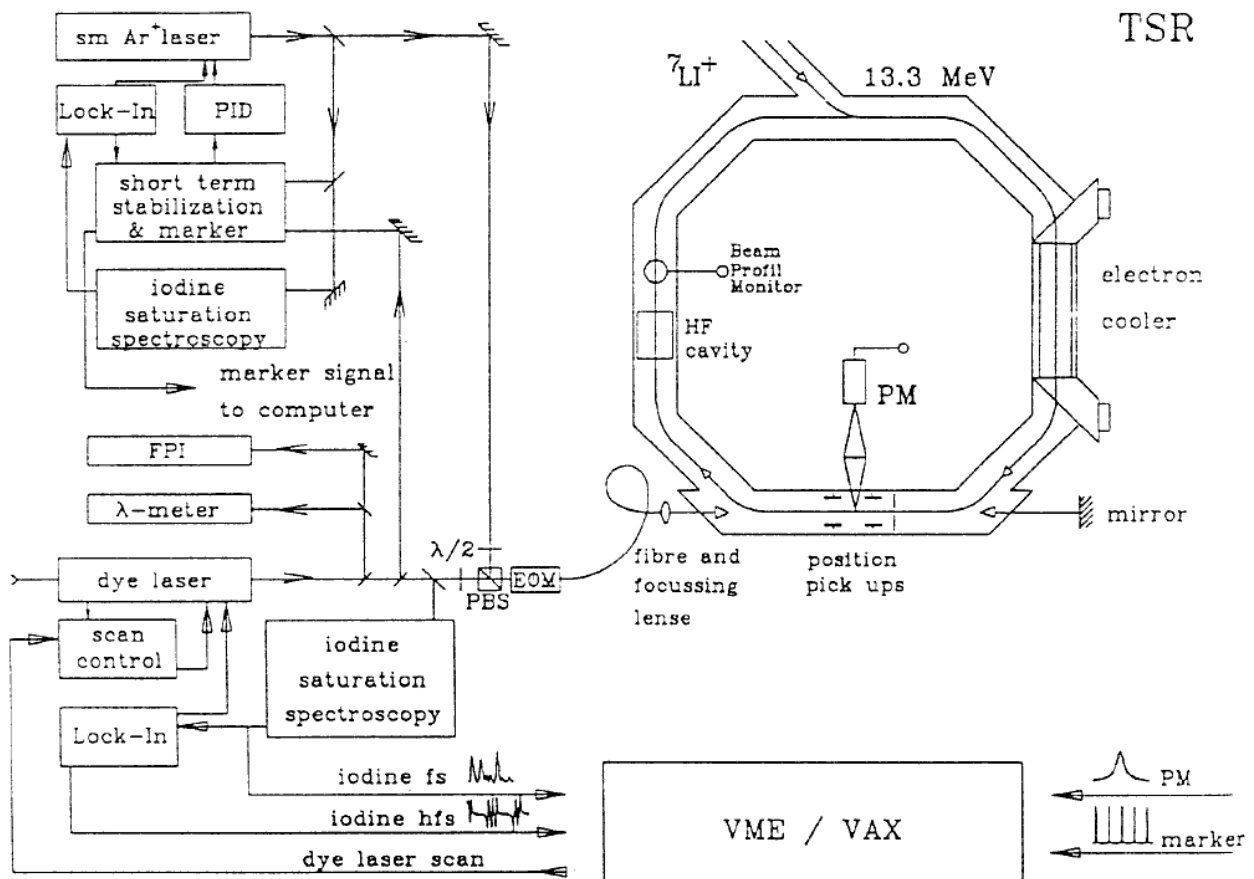
Insgesamt ergab sich damit ein Doppler-Shift von 3235.8722 ± 0.0076 MHz. Der theoretische Wert lag bei 3235.8626 ± 0.0071 MHz. Dies entspricht einer Genauigkeit von $2.3 \cdot 10^{-6}$. Die bis auf ± 7.6 kHz genaue Frequenz-Bestimmung ermöglicht es prinzipiell schon, den Doppler-Effekt vierter Ordnung zu messen, welcher mit 10.3 kHz berechnet wurde.

3.8 Grieser, et al. (1994)

Um eine weitere Steigerung der Genauigkeit zu erreichen wurde am Test-Speicherring (TSR) in Heidelberg ein weiteres Experiment zur Bestimmung des transversalen Doppler-Effekts durchgeführt. Hierbei wurde ein Li-Ionenstrahl im Speicherring mit der Zwei-Photonen-Spektroskopie angeregt und die Fluoreszenz beobachtet.

Der Ionenstrahl wurde mit einer Energie von 13.3 MeV ($\beta \approx 0.064$) in den Ring eingekoppelt. Der Ring selbst hat eine Umlauflänge von etwa 55 m. Mithilfe einer HF-Cavity wurde der Ionen-Strahl zum einen „gebunched“, d.h. in kleinere Umlauf-Pakete unterteilt, zum anderen konnten dort Energieverluste ausgeglichen werden. Durch einen Elektronen-Kühler wurde die ursprüngliche Breite des Strahls von 10 mm auf etwa 1 mm verringert. Hier wurden Elektronen über eine kurze Strecke mit dem Strahl mitgeführt, die dann über Coulomb-Stöße den Strahl in der Breite einengten („transversales Kühlen“).

Zwei entgegenläufige Laser wurden an einer Seite des Rings eingekoppelt und konnten dort den Zwei-Photonen-Übergang anregen. Der TPA-Übergang selbst bestand aus den Übergängen A) $2^3S_1 F=\frac{5}{2} \rightarrow B) 2^3P_2 F'=\frac{5}{2}$ und B) $2^3S_1 F=\frac{3}{2} \rightarrow C) 2^3P_2 F'=\frac{5}{2}$ (siehe Term-schemata Seite 25: Übergänge 2 und 3). Diese bilden ein sogenanntes Λ -System. Die in den

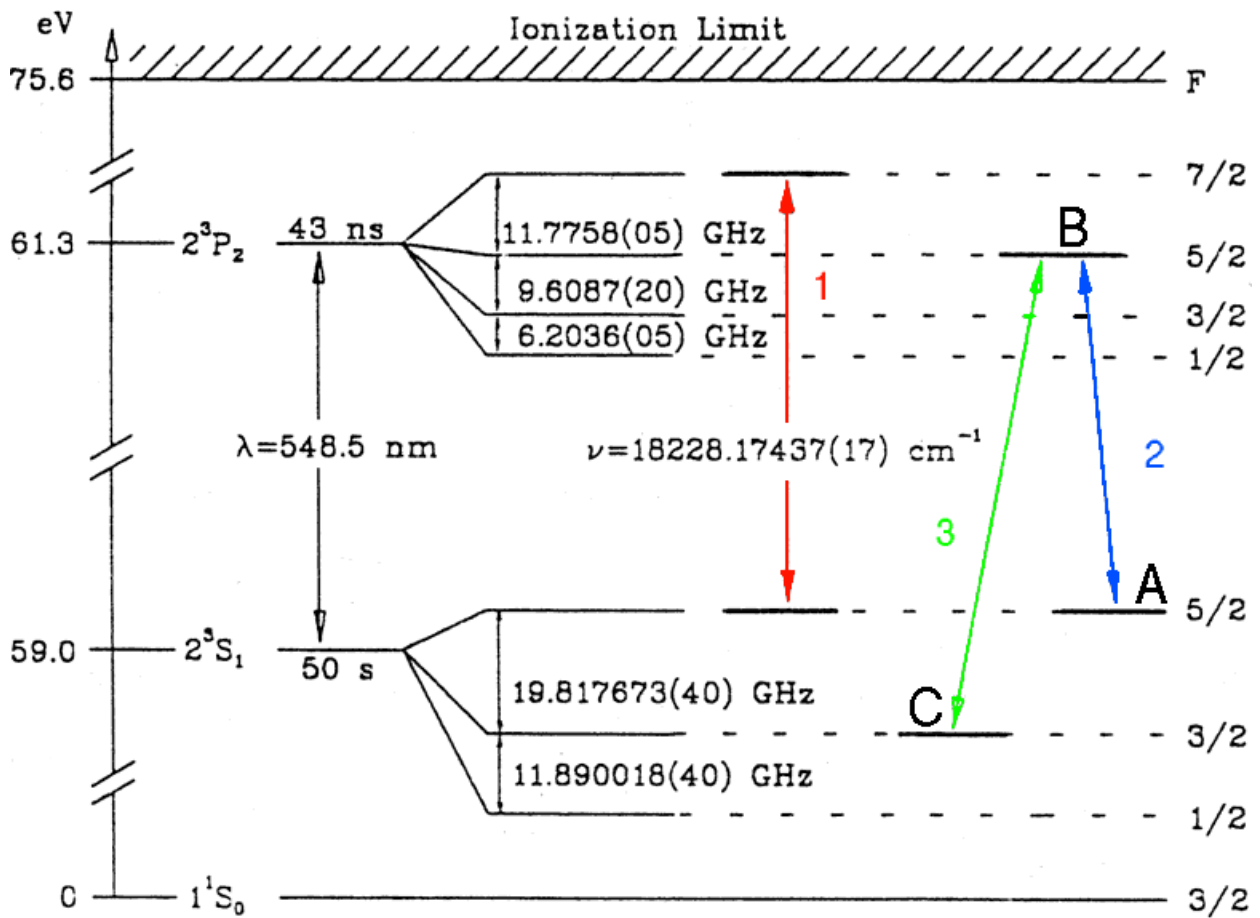


Ring eingekoppelten Ionen liegen zunächst im Zustand A vor. Betrachten wir vorerst ein reines Zwei-Niveausystem mit den Zuständen A und B (Übergang 2). Regen wir den Übergang 2 resonant an, so werden wir nach kurzer Zeit eine Gleichbesetzung der Zustände erreichen: es werden genauoviele Photonen von Zustand A absorbiert, wie von Zustand B induziert emittiert werden. Die Besetzungsdichten von Zustand A und B sind somit gleich. Nehmen wir jetzt aber noch zusätzlich den Zustand C hinzu, so geschieht folgendes: Teilchen, die sich im Zustand B befinden, können außerdem spontan in den Zustand C zerfallen. Diese Teilchen sind damit für den Anregungsprozeß mit Übergang 2 verloren. Das bedeutet aber, daß nach relativ kurzer Zeit Zustand A völlig entleert und Zustand C vollständig bevölkert wird. Durch Einstrahlen des Übergangs 2, kann also das Niveau C optisch gepumpt werden. Mithilfe eines weiteren Übergangs 1 von Zustand A nach $2^3P_2 F' = \frac{7}{2}$ kann nun überprüft werden, ob sich im Zustand A Teilchen befinden oder nicht.

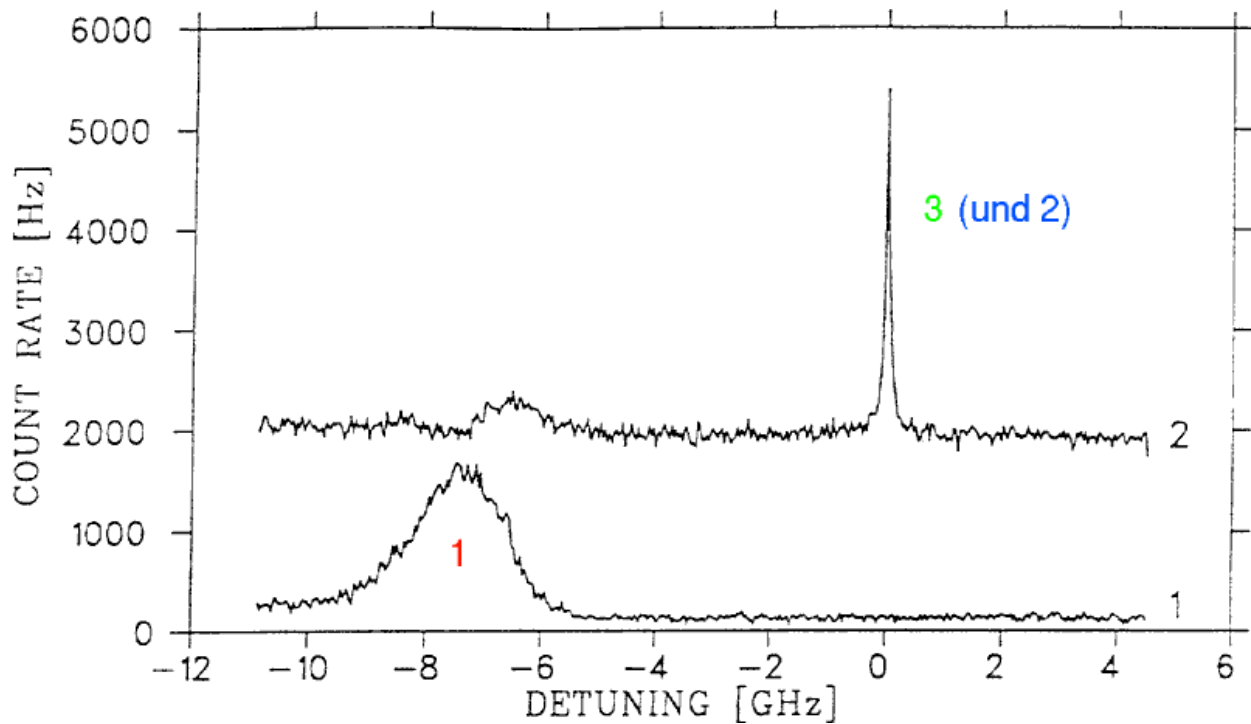
Die Messung selbst wurde folgendermaßen durchgeführt: Zunächst wurde mit einem Farbstoff-Laser das gesamte Spektrum durchgescannt. Die aufgenommene Kurve ist auf Seite 25 abgebildet. Deutlich sichtbar ist die doppler-verbreiterte Linie des Übergangs 1, da der Zustand A noch vollständig bevölkert ist. Als nächstes wurde ein resonant auf den Übergang 2 eingestellter Ar^+ -Ionen-Laser in entgegengesetzter Richtung eingestrahlt. Dieser entleert nun den Zustand A und bevölkert Zustand C. Der Farbstoff-Laser scannt nun abermals das komplette Spektrum durch (Kurve 2). Die Resonanz von 1 ist nun kaum noch im Spektrum zu sehen. Dafür ist eine sehr scharfe Resonanz für Übergang 3 feststellbar.

Die Schärfe des Übergangs ist dadurch zu erklären, daß die Ionen nun instantan mit zwei Photonen aus den Übergängen 2 und 3 wechselwirken, dadurch in einem Zug von Zustand A nach Zustand C gelangen und umgekehrt. Aufgrund der unterschiedlichen Richtungen

Termschema des Li-Ions:

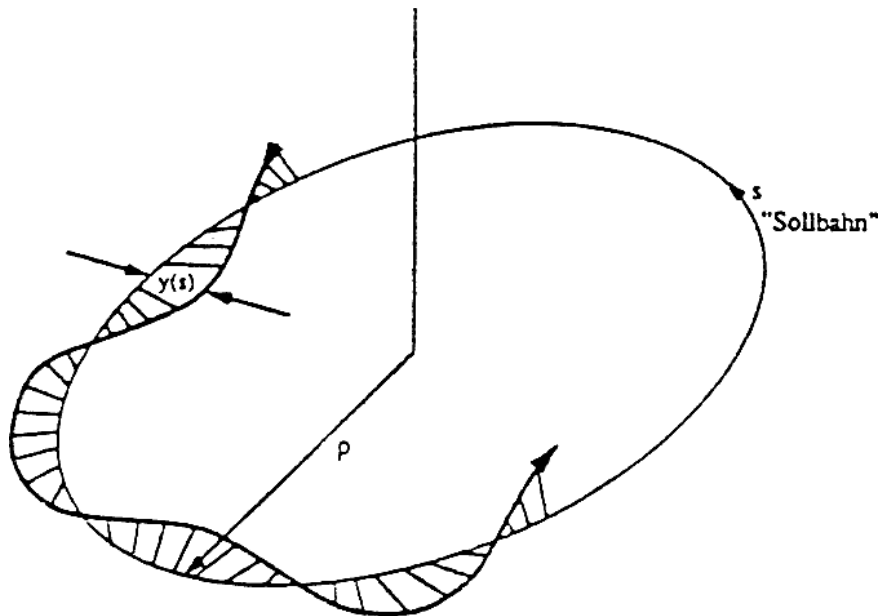


Messung mit (obere Kurve) und ohne Ar^+ -Laser (untere Kurve):



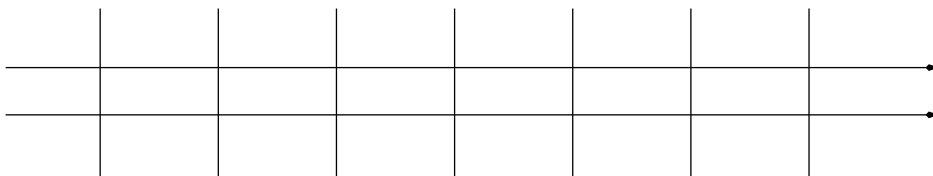
löschen sich die linearen Terme der Doppler-Verbreitung aus. Beide Laser können immer nur mit einer Geschwindigkeitsklasse zusammen wechselwirken.

Größte Unsicherheit bei der Spektroskopie in einem Speicherring stellt die Teilchenbahn der Ionen im Ring dar. Diese ist nämlich nicht ideal: die Ionen führen eine Gyration-Bewegung um die Sollbahn aus.

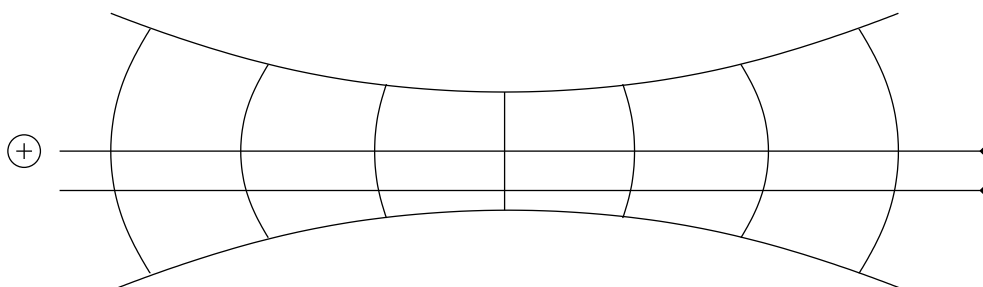


Dadurch kommt es zu Phasenfront-Unsicherheiten. Die Ionen sehen die Wellenfront unter einem anderen Winkel, als sie eigentlich eingestrahlt wird. Zudem muß auch berücksichtigt werden, daß es sich bei Laser-Licht nicht um ebene Wellen handelt, sondern um Gauß-Strahlen. Eine leichte Verschiebung der Ideallinie hat deswegen schon erhebliche Auswirkungen auf die Phasenfront, die das Ion sieht. Dagegen würde sich dieses bei einer ebenen Welle gar nicht bemerkbar machen.

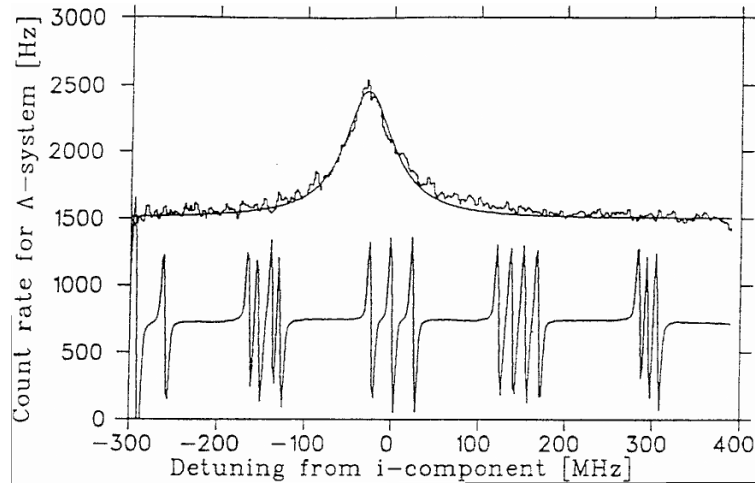
Ebene Welle:



Gauß-Strahl:



Die Phasenfront-Unsicherheiten führten dazu, daß die scharfe TPA-Resonanzlinie immer noch eine Halbwertsbreite von $\nu_{FWHM} \sim 60$ MHz hat. Das führt dazu, daß die exakte Lage der Resonanz nur auf ± 2.7 MHz genau bestimmt werden kann.



Weitere Fehler ergaben sich durch Unsicherheiten in den Winkeleinstellungen von ± 30 kHz für die Justage Laser – Laser und ± 285 kHz für die Einstellung Laser – Ionenstrahl. Außerdem wurden der AC-Stark-Effekt mit ± 1 MHz, Störungen durch Photonenrückstoß mit ± 0.7 MHz und Unbekanntheiten der Lebensdauer mit ± 0.5 MHz berücksichtigt. Insgesamt ergab sich dadurch ein Fehler, der unter 3.1 MHz lag.

Damit ergab sich eine gemessene Resonanz-Frequenz von:

$$\nu_{exp} = 512\,667\,592 \pm 3.1 \text{ MHz}$$

Die nach der Speziellen Relativitätstheorie berechnete Übergangsfrequenz lag bei $\nu_{exp} = 512\,667\,590 \pm 3.2$ MHz. Somit ergab sich eine relative Abweichung von $1.1 \cdot 10^{-6}$. Für die Doppler-Verschiebung vierter Ordnung wurde eine Abweichung von $2.7 \cdot 10^{-4}$ angegeben.

Anmerkungen zu diesem Experiment

Eine weitere Steigerung der Genauigkeit in diesem Experiment kann durch höhere Geschwindigkeit erreicht werden. Einere höhere Geschwindigkeit (z.B. $\beta \approx 0.75$) kann durch Verwendung des leichteren Wasserstoffs erreicht werden. Eine Genauigkeit von etwa 10^{-10} könnte damit erreicht werden. Aktuell wird die Genauigkeit am TSR-Experiment mit $8 \cdot 10^{-7}$ angegeben [13].

4 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, daß es neben dem klassischen Doppler-Effekt, der linear in v ist, auch einen quadratischen Term, bzw. Terme höherer Ordnung gibt. Dies ist ein rein relativistischer Effekt und klassisch nicht zu erklären. Dieser quadratische Anteil ist auch in senkrechter Richtung vorhanden, in der klassisch kein Doppler-Effekt erwartet wird.

Weiterhin haben wir festgestellt, daß sich lineare Terme auslöschen, wenn zwei entgegengerichtete Wellen gleichzeitig absorbiert werden und einen einzigen Übergang anregen. Dieses nutzt man bei der Zwei-Photonen-Spektroskopie aus. Sie ist somit dazu geeignet, den quadratischen Anteil des Doppler-Effekts und damit auch die Spezielle Relativitätstheorie nachzuweisen.

Abschließend bleibt zu sagen, daß sich die Messungen des transversalen Doppler-Effekts von einer anfänglichen Genauigkeit von 3% im Jahre 1938 bis zu einer heutigen Genauigkeit von 10^{-7} verbessert haben, und daß zudem die aktuellen Experimente noch Potential für weitere drei oder vier Größenordnungen bieten. Unten sind nochmals die Genauigkeiten der beschriebenen Experimente aufgelistet.

Jahr	Experiment	Genauigkeit
1938	Kanalstrahlen (Ives, Stilwell)	$3 \cdot 10^{-2}$
1985	schnelle H-Atome (Juncar)	$5 \cdot 10^{-3}$
1986	schnelle H-Atome (MacArthur)	$2.7 \cdot 10^{-4}$
1985	TPA an Neon (Kaivola)	$4 \cdot 10^{-5}$
1986	TPA an Neon (Riis)	$1.4 \cdot 10^{-6}$
1993	TPA an Neon (McGowan)	$2.3 \cdot 10^{-6}$
1994	TSR (Grieser)	$1.1 \cdot 10^{-6}$
aktuell	TSR	$8 \cdot 10^{-7}$
erwartet	TSR	$\sim 10^{-10}$

5 Ergänzungen

AC-Stark-Shift

Genauso wie Zustände durch das Vorhandensein magnetischer Felder aufspalten (Zeeman-Effekt), spalten sie auch durch elektrische Felder auf (Stark-Effekt). Aufgrund der hohen Intensitäten, die ein Laser erreichen kann, sind die zu untersuchenden Atome sehr hohen elektrischen Feldern ausgesetzt. Hierbei handelt es sich aber nicht um statische sondern um Wechselfelder. Ist die Frequenz des Wechselfeldes resonant mit einem Übergang, so kann dieser angeregt werden (AC-Stark-Effekt) [20].

Doppler-Verbreiterung

Befindet sich ein Gas im thermodynamischen Gleichgewicht, so besitzt es eine Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell-Boltzmann

$$f(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2 \cdot k_b T}}$$

Strahlen wir nun eine Frequenz ein, so sehen Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten auch verschiedene Doppler-Verschiebungen. Je mehr Teilchen nun einer bestimmten Geschwindigkeitsklasse angehören, desto größer wird auch die Absorption für die zu dieser Geschwindigkeit gehörenden dopplerverschobenen Frequenz sein. Somit wird das Linien-Profil ebenfalls eine Gaußkurve sein. Es handelt sich hierbei um eine inhomogene Verbreiterung.

Druck-Verbreiterung

Durch einen Stoß sieht das stoßende Teilchen einen Phasensprung in der Lichtwelle, da es nach dem Stoß nicht mehr mit demselben Photon wie vorher wechselwirkt. Dies ist aber gleichbedeutend mit einer kürzeren Lebensdauer dieses Zustands vor dem Stoß. Aufgrund der kürzeren Lebensdauer wird die Linie verbreitert (siehe natürliche Linienbreite).

Heterodyne-Messung zweier Frequenzen

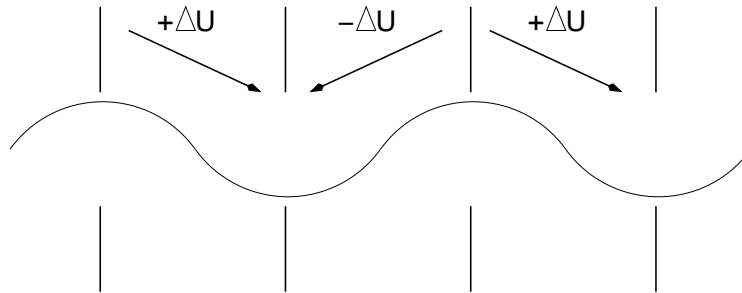
Um die Differenz zweier nahe beieinanderliegenden Frequenzen zu messen, werden beide Signale in einem nicht-linearen Bauelement überlagert. Dabei können Summen- und Differenzfrequenzen entstehen. Betrachten wir zwei Schwingungen der Form $\psi_1 = E_1 \sin \omega_1 t$ und $\psi_2 = E_2 \sin \omega_2 t$. Das resultierende Signal wird proportional sein zu:

$$\begin{aligned} I &\sim [\psi_1 + \psi_2]^2 \\ &\sim [E_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + E_2 \cdot \sin(\omega_2 t)]^2 \\ &\sim E_1^2 \cdot \sin^2(\omega_1 t) + E_2^2 \cdot \sin^2(\omega_2 t) + 2E_1 E_2 \cdot \sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\omega_2 t) \\ &\sim E_1^2 \cdot \sin^2(\omega_1 t) + E_2^2 \cdot \sin^2(\omega_2 t) + 2E_1 E_2 \cdot [\cos(\omega_1 t - \omega_2 t) - \cos(\omega_1 t + \omega_2 t)] \end{aligned}$$

Somit lassen sich z.B. auch Frequenzen in schwer detektierbaren Bereichen messen: liegt das zu detektierende Signal z.B. im Fern-Infraroten und hat außerdem noch eine sehr schwache Amplitude, so kann man das Signal z.B. mit einer Frequenz im sichtbaren Bereich mit einer größeren Amplitude überlagern. Die Summenfrequenz ist einfacher zu detektieren, da sie nun im sichtbaren Bereich liegt. Die überlagerte Frequenz ist bekannt, somit kann das ursprüngliche Signal im Fern-Infraroten aus der Messung im Sichtbaren abgelesen werden.

HF-Cavity

In einer HF-Cavity wird eine Hoch-Frequenz-Welle in das System eingekoppelt. Befinden sich nun dort geladene Teilchen, so sehen diese zwischen den Maxima und Minima der Welle eine Potential-Differenz ΔU , ähnlich wie bei einem Plattenkondensator. Sind die Ladungen zu schnell, werden sie abgebremst, sind sie zu langsam, werden sie beschleunigt. Es bilden sich also Ladungs-Pakete. Somit können im Speicherring z.B. auch Enegrieverluste (Synchrotron-Strahlung) ausgeglichen werden.



Natürliche Linienbreite

Aufgrund der Unschärfe-Relation $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$ ergibt sich für einen Zustand, der die Lebensdauer τ besitzt, eine natürliche Linienbreite von:

$$\begin{aligned} \Delta E &\approx \frac{\hbar}{\tau} \\ \Rightarrow \quad \omega &\approx \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Für die volle Halbwertsbreite ergibt sich:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi \cdot \tau}$$

Bei der Verbreiterung durch die Unschärfe-Relation handelt es sich um eine homogene Verbreiterung. Das Linienprofil selbst ist dabei eine Lorentzkurve:

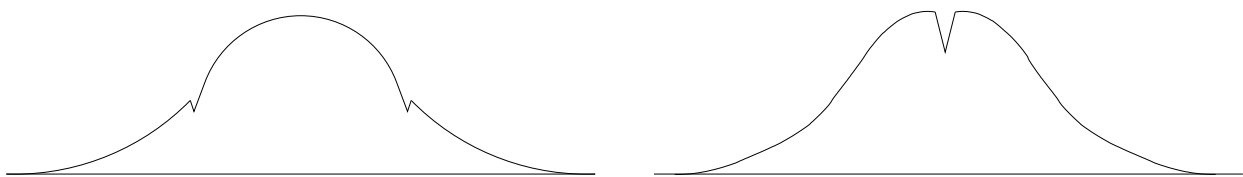
$$P(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Delta\nu}{2}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}$$

Photonen-Rückstoß

Photonen können auf Teilchen auch einen Impuls übertragen. Da bei hohen Intensitäten viele Photonen wechselwirken, wird die Maxwell-Boltzmann-Verteilung eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht entscheidend gestört. Falls das System wieder in einen Gleichgewichtszustand kommt, muß eine neue Verteilungsfunktion ermittelt werden. Im ungünstigsten Fall gibt es allerdings gar keine stationären Zustände mehr.

Sättigungs-Spektroskopie

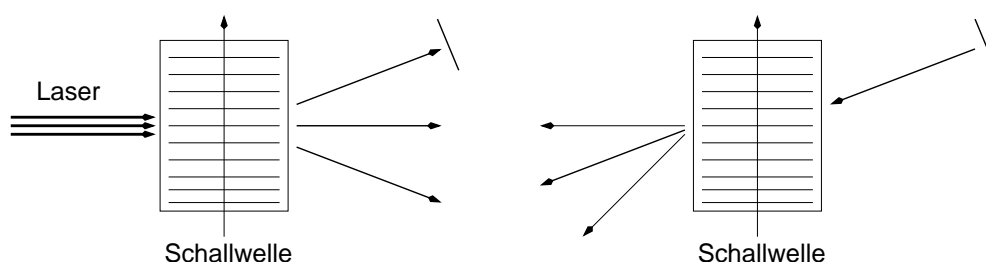
Die Absorptionslinien eines Gases sind normalerweise dopplerverbreitert. Durch Einstrahlung eines „Pump-Lasers“ erzeugt man ein Loch (Bennet-Hole) in der Verteilung des unteren und einen „Dip“ in der Verteilung des oberen Niveaus bei der eingestrahlten Laser-Frequenz. Ein zweiter „Probe-Laser“ tastet nun diese neue Verteilung ab und kann diese erzeugte Struktur sichtbar machen. Stammen Pump- und Probe-Laser aus derselben Quelle, laufen in entgegengesetzter Richtung und befinden sich nicht exakt in der Resonanz, so wird das Bennet-Hole sowohl links als auch rechts von der Resonanzlinie des Übergangs erzeugt. Sind Pump- und Probe-Laser aber beide exakt in Resonanz, so wird das Bennet-Hole bei der Resonanz-Frequenz doppelt so stark hervortreten. Diese doppelt so starke Struktur wird Lamb-Dip genannt und kann dazu genutzt werden, dicht benachbarte Linien innerhalb des Doppler-Profiles zu detektieren.



Vermeidung des Rücklaufens einer Lichtwelle zurück in den Laser

Da bei der Zwei-Photonen-Spektroskopie der Laser meist in sich selbst zurück reflektiert wird, muß verhindert werden, daß der Strahl zurück in den Laser-Resonator läuft, wo er schlimmstenfalls das laseraktive Medium zerstören könnte. Dazu kann man sich eines Polarisators und eines Bauelements bedienen, welches z.B. unter Ausnutzung des magnetisch-optischen Effekts (Faraday-Effekt) die Polarisation des Lichts um 45° dreht (Faraday-Isolator). Dadurch ist die Polarisation des zurücklaufenden Strahls um 90° gedreht, wenn er wieder am Laser ankommt, da er ja inzwischen zweimal durch das Bauelement gelaufen ist. Der Polarisator dient nun als Analysator und läßt den reflektierten Strahl nicht mehr passieren.

Eine andere Möglichkeit ist die Benutzung eines Akusto-Optischen-Modulators (AOM). Dabei wird eine Schallwelle über einen Piezo durch einen Kristall geschickt. Die daraus resultierenden Dichteschwankungen im Kristall wirken auf eine Lichtwelle, die durch diesen Kristall läuft, genauso wie ein Gitter. Es kommt deswegen zu Beugungseffekten (Bragg-Reflexion). Es entstehen Beugungsmaxima höherer Ordnung. Nutzt man nun zur weiteren Spektroskopie das Licht eines solchen Beugungsmaximums, welches unter einem anderen Winkel aus dem Kristall austritt, wird das Licht auf seinem Rückweg ebenfalls das Beugungsgitter passieren, so daß nur noch ein sehr geringer Anteil der ursprünglichen Welle zu seinem Ausgangspunkt zurücklaufen kann.



Literatur

- [1] A. Brillet, J. L. Hall. Improved Laser Test of the Isotropy of Space. *Phys. Rev. Let.*, 42:549–522, 1979.
- [2] Schäfer Bergmann. *Experimentalphysik Bd. 4: Teilchen*. de Gruyter, 1992.
- [3] Schäfer Bergmann. *Experimentalphysik Bd. 3: Optik*. de Gruyter, 1993.
- [4] D. Hils, J. L. Hall. Improved Kennedy-Thorndike Experiment to Test of Special Relativity. *Phys. Rev. Let.*, 64:1697–1700, 1990.
- [5] D. J. Grove, J. G. Fox. e/m for 385-MeV Protons. *Phys. Rev.*, 90:378, 1953.
- [6] D. W. MacArthur. Special relativity: Understanding experimental tests and formulations. *Phys. Rev. A*, 33:1–5, 1986.
- [7] D. W. MacArthur, et al. Test of the Special-Relativistic Doppler Formula at $\beta=0.84$. *Phys. Rev. Let.*, 56:282–285, 1986.
- [8] Demtröder. *Laser Spectroscopy: basic concepts and instrumentation*. Springer, 1982.
- [9] E. Riis, et al. Test of the Isotropy of the Speed of Light Using Fast-Beam Laser Spectroscopy. *Phys. Rev. Let.*, 60:81–84, 1988.
- [10] Farley, et al. [ToDo: Titel finden]. *Nature*, 217:17, 1968.
- [11] Walter Greiner. *Theoretische Physik Bd. 3A: Spezielle Relativitätstheorie*. Harri Deutsch, 1989.
- [12] G. R. Stilwell H. E. Ives. An experimental study of the rate of a moving clock. *J. Opt. Soc.*, 28:215–226, 1938.
- [13] Homepage TSR. <http://www.mpi-hd.mpg.de/ato/homes/ggwinner/pages/Giessen200104/slideshow.html>, Jul. 2001.
- [14] J. Bailey, et al. Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit. *Nature*, 268:301, 1977.
- [15] J. C. Haefele, R. E. Keating. [ToDo: Titel finden]. *Science*, 177:166, 1972.
- [16] M. Kaivola, et al. Measurement of the Relativistic Doppler Shift in Neon. *Phys. Rev. Let.*, 54:255–258, 1985.
- [17] P. Juncar, et al. New Method to Measure the Relativistic Doppler Shift: First Results and a Proposal. *Phys. Rev. Let.*, 54:11–13, 1985.
- [18] P. Wolf, G. Petit. Satellite test of special relativity using the global positioning system. *Phys. Rev. A*, 56:4405–4409, 1997.
- [19] R. McGowan, et al. New Measurement of the Relativistic Doppler Shift in Neon. *Phys. Rev. Let.*, 70:251–254, 1993.
- [20] S. H. Autler, C. H. Townes. Stark Effect in Rapidly Varying Fields. *Phys. Rev. Let.*, 100:703–722, 1955.
- [21] Z. Bay, J. A. White. Comment on 'Test of the Isotropy of the Speed of Light...'. *Phys. Rev. Let.*, 62:841–842, 1989.