

**Zeitdilatation**  
**(Zwei-Photonen-Spektroskopie)**

**Marcus Beranek**

# Übersicht:

## 1) Wiederholung:

Spezielle Relativitäts-Theorie (SRT)

insbesondere: Doppler-Effekt

Test-Theorien für SRT

## 2) Experimente:

Gasentladung

Wechselwirkung: schnelle Teilchen – Laser

Zwei-Photonen-Spektroskopie (TPA)

# Spezielle Relativitätstheorie

## Grundlagen:

- Inertialsysteme: es gibt eine ausgezeichnete Klasse von Bezugssystemen, in denen die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten
- Relativitätsprinzip: in allen Inertialsystemen laufen alle Naturgesetze (Newton, Maxwell) gleichartig ab
- Homogenität von Raum und Zeit
- Isotropie des Raumes

## Daraus folgen:

- Existenz einer obereren Grenzgeschwindigkeit  $c = \text{const.}$
- Lorentz-Transformation beim Übergang von einem Inertialsystem S zu einem anderem Inertialsystem S'

## Klassisch: Galilei-Transformation

$$\begin{aligned}T &= t \\X &= x - v \cdot t\end{aligned}$$

## Relativistisch: Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned}T &= \gamma(v) \cdot \left( t - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \\X &= \gamma(v) \cdot (x - v \cdot t)\end{aligned}$$

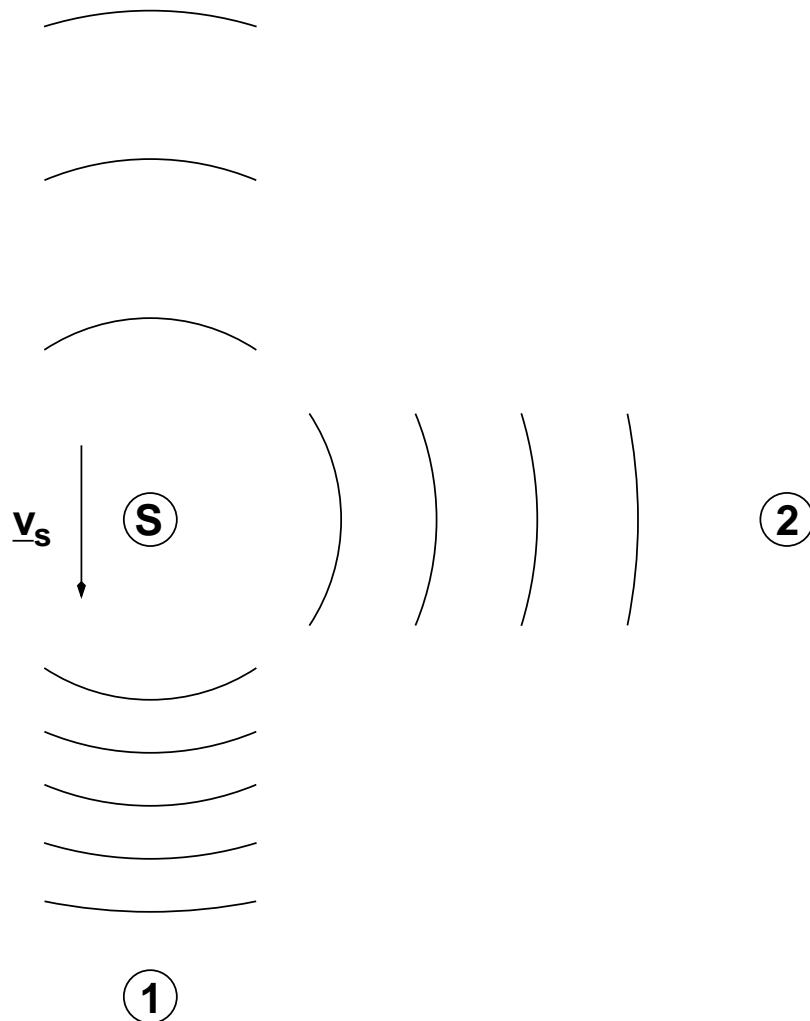
$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Damit: Zeitdilatation und Längenkontraktion

# Doppler-Effekt

Klassisch: S sendet Signal mit Frequenz  $\nu$ .



Frequenzverschiebung beim Beobachter 1 / 2:

longitudinal (1):

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 + \frac{v_s}{c}}{1 - \frac{v_e}{c}} \qquad \nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)$$

transversal (2):

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu \\ \Delta\nu &= 0 \end{aligned}$$

## Doppler-Effekt

Relativistisch: Frequenzverschiebung ist nur noch abhängig von der Relativ-Geschwindigkeit zwischen Sender und Beobachter.

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 - \beta \cos \varphi}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

bzw.

$$\nu' = \nu \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi'}$$

Relativitätsprinzip: Ein Signal, welches von System A dem System B nachgesendet wird, muß für B genauso erscheinen, wie für A ein Signal, welches von B entgegen A gesendet wird.

$$\nu' = \nu \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} \quad (\varphi' = 0)$$

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \quad \neq 0 \quad (\varphi' = \frac{\pi}{2})$$

$$E' = h \cdot \nu' = \hbar \cdot \omega' = \hbar \cdot \gamma \cdot (\omega \pm \underline{k} \cdot \underline{v}) \quad \varphi' = \pi, 0$$

Da  $v < c \Rightarrow \beta < 1$  : Reihenentwicklung der Wurzel:

$$\nu' = \nu \cdot (1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots) \quad (\varphi' = 0)$$

$$\nu' = \nu \cdot (1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots) \quad (\varphi' = \pi)$$

Lineare und quadratische Terme der neuen Frequenz.

## Wie kann man die Spez. Relativitätstheorie testen?

- Lebensdauer von relativistischen Teilchen (Bailey, 1977)
- Vergleich von bewegten Uhren mit ruhenden (Wolf/Petit, 1997) Problem: Synchronisation, Gravitation
- Raumabhängigkeit bei der Ausbreitung des Lichts, Michelson-Morley-Experiment (Brillet/Hall, 1979)
- Geschwindigkeitsabhängigkeit bei einer festen Länge, Kennedy-Thorndike-Versuch (Hills/Hall, 1990)
- Masse als Testparameter abhängig von  $v$  (Grove/Fox, 1953)
- Messung des quadratischen (transversalen) Doppler-Effekts

Test-Theorien von Mansourie/Sexl, Robertson:

Allgemeinere Form der Lorentz-Transformation:

$$T = a_0 \cdot t + \left(\frac{v}{c^2}\right) \cdot a_1 \cdot x$$

$$X = v \cdot a_0 \cdot t + a_1 \cdot x$$

$$Y = a_2 \cdot y$$

$$Z = a_2 \cdot z$$

$$a_0 = a_0(v), \quad a_1 = a_1(v), \quad a_2 = a_2(v)$$

SRT:

$$a_0 = \gamma \cdot g_0, \quad a_1 = \gamma \cdot g_1, \quad a_2 = \gamma \cdot g_2$$

$$g_0 = g_1 = g_2 = 1$$

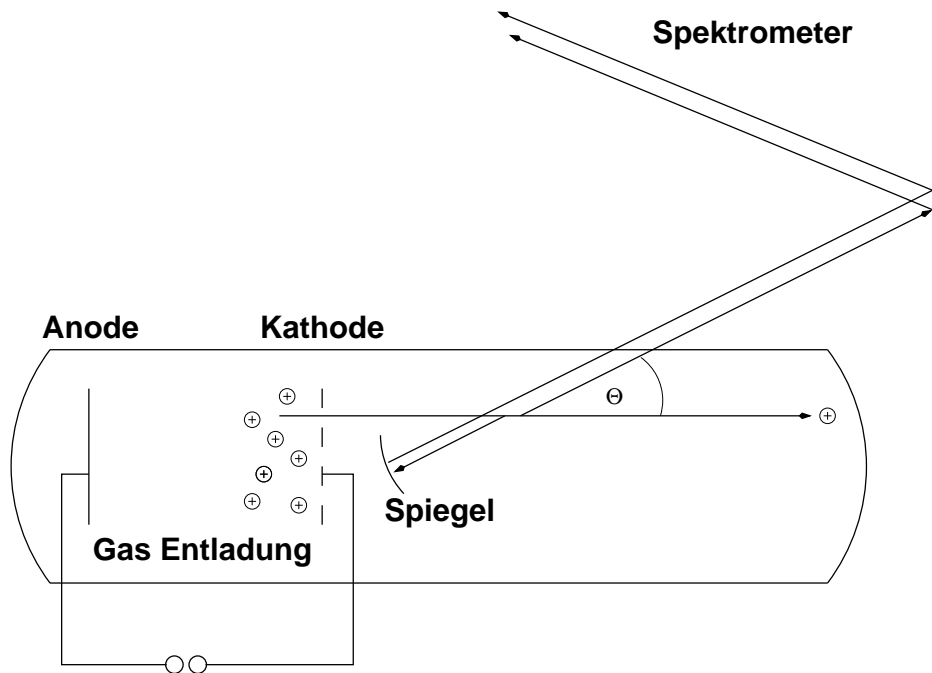
⇒ Es gibt drei Arten von Tests.

# Nachweis des quadratischen Doppler-Effekts

Quadratischer Term  $\rightarrow$  keine Richtungs-Abhängigkeit

1. Möglichkeit: Beobachtung  $\perp$  zur Bewegungsrichtung  
Problem: ungenaue Winkelmessung  
kurze Strecke für Wechselwirkung
2. Möglichkeit: Beobachtung  $\parallel$  zur Bewegungsrichtung  
Problem: linearer Term überwiegt

Ives-Stillwell (1938): Messung der quadr. Doppler-Verschiebung an Wasserstoff-Kanalstrahlen ( $H-\beta$ , 486.1 nm)



Probleme: Spannung, Winkel, Spektrale Auflösung, Geschwindigkeit und Divergenz des Teilchenstrahls

# Spektrum:

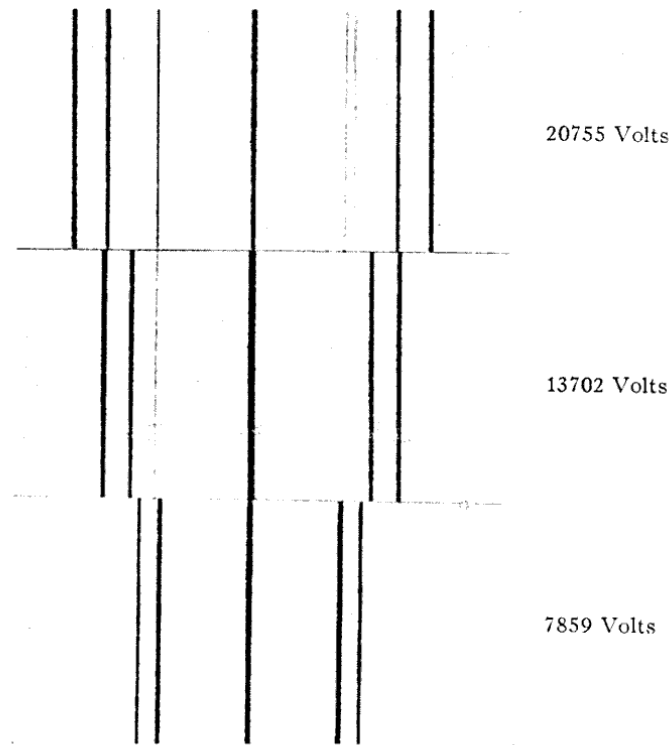


FIG. 9. Spectrograms obtained for several applied voltages.

# Doppler-Verschiebung:

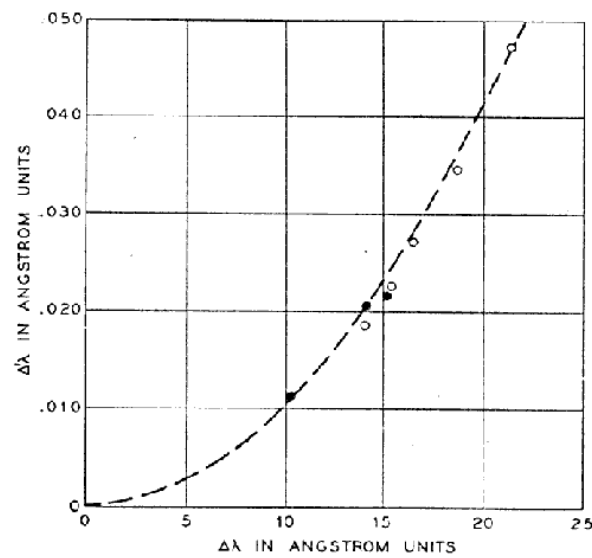
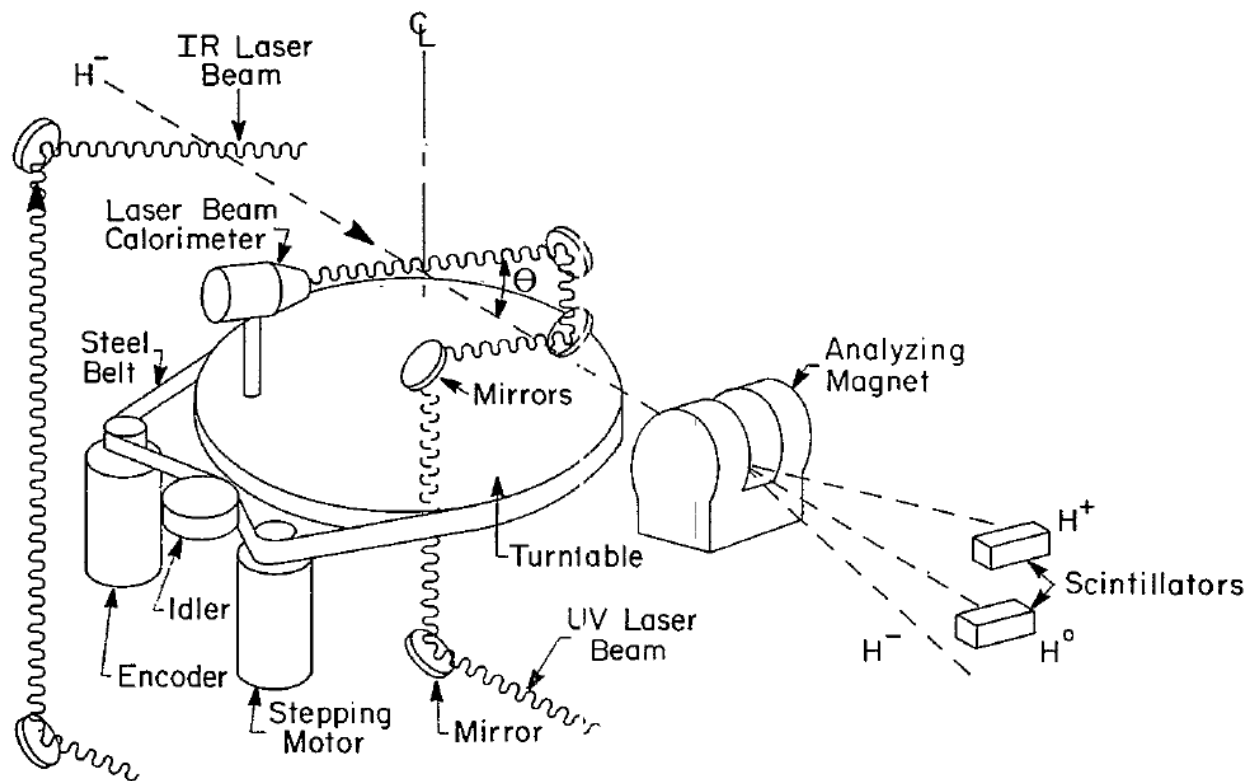


FIG. 14. Computed and observed second-order shifts, plotted against first-order (Doppler) shifts.

Ergebnis: Bestätigung der SRT bis auf Fehler von  $3 \cdot 10^{-2}$



## MacArthur (1986): Winkelabhängigkeit des Doppler-Effektes



Schnelle H-Atome ( $E_H \cong 800 \text{ MeV}$ ,  $\beta \cong 0.84$ ) werden durch UV-Laser ( $E_0 = 4.7 \text{ eV}$ ) unter dem Winkel  $\Theta$  angeregt.

Dadurch Doppler-Verschiebung:

$$E_n = \frac{E_0}{g_0} \cdot \gamma \cdot (1 - \beta \cdot \cos \Theta)$$

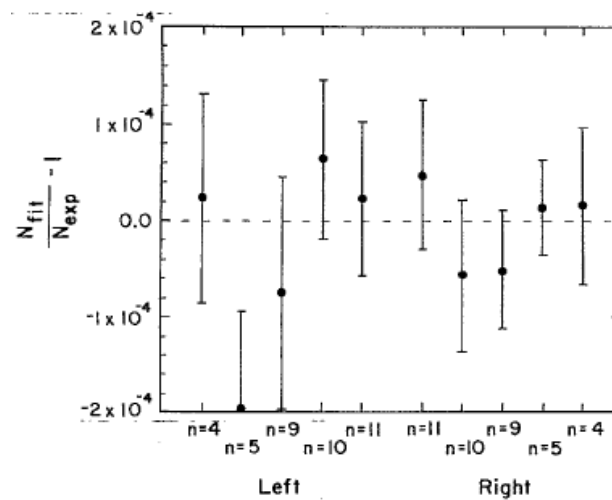
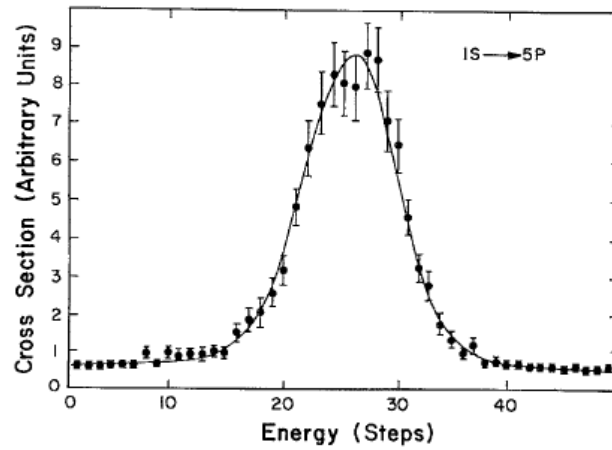
$$E(\Theta) = 1.4 \dots 15.8 \text{ eV}$$

Die Energie-Niveaus  $E_n$  des Wasserstoff-Atoms sind bekannt.

Trennung der angeregten Atome durch ein Gradienten-Magnetfeld.

Messung der Übergänge  $n = 3$  nach  $n = 4 \dots 11$  für den Winkel  $\Theta = 0 \dots 2\pi$ .

## Gemessene Dopplerkurve und Winkelabweichung:



## Fehler der Meßgrößen:

Größe	Fehler
$\Delta\Theta$	$30.2 \mu rad$
$\beta$	$\pm 0.69 \cdot 10^{-4}$
$E_H$	$\pm 0.1 MeV$
$E_0$	$\pm 0.79 \cdot 10^{-3} eV$
$g_0$	$\pm 2.7 \cdot 10^{-4}$

Damit ergibt sich:

$$g_0 = 1.00004 \pm 2.7 \cdot 10^{-4}$$

⇒ sehr gute Bestätigung mit  $g_0 = 1$  (SRT)

Juncar (1985): Messung des Doppler-Effekts (parallel und antiparallel) an Wasserstoff-Atomen:

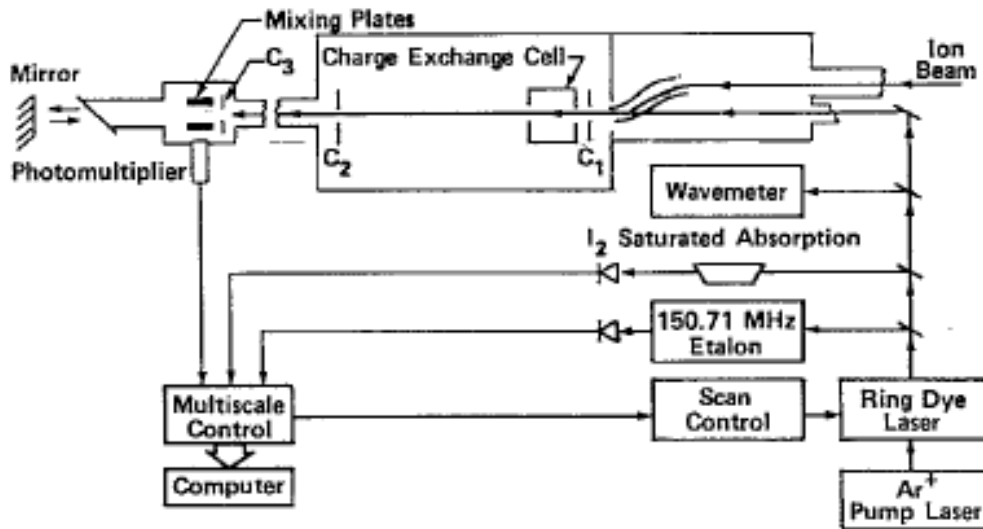
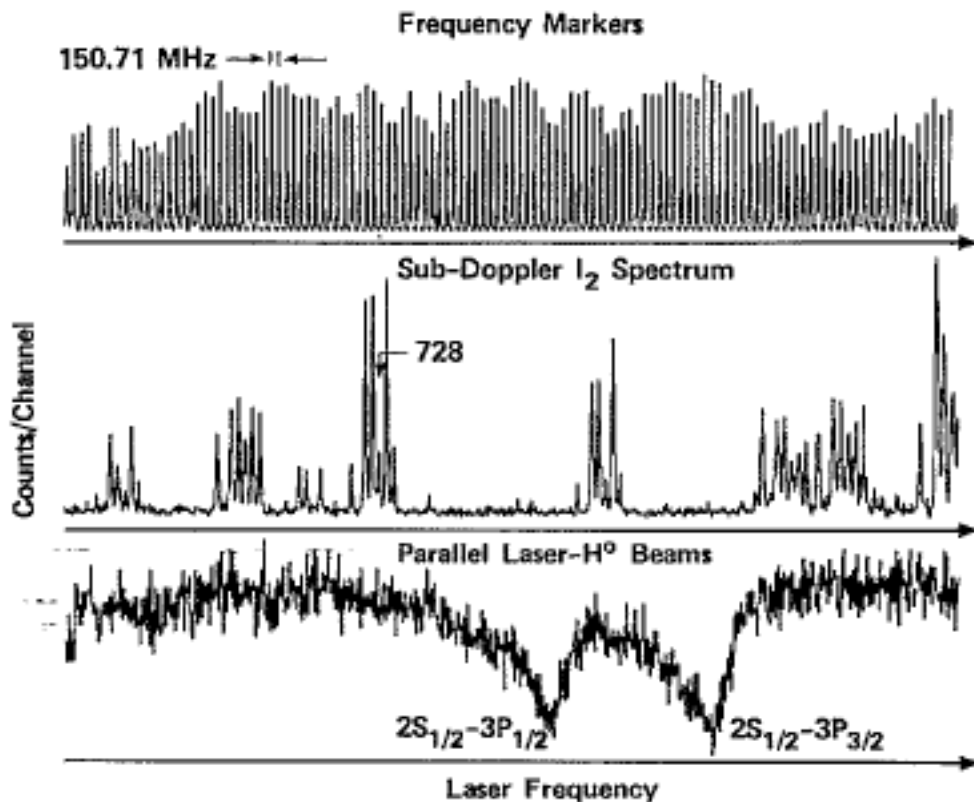


FIG. 1. The UNISOR laser facility.

Kalibrierung per  $I_2$ -Sättigungs-Spektroskopie, Skalierung per 150.71 MHz-Etalon



Für Wellenzahlen ( $\sigma_+$  parallel,  $\sigma_-$  antiparallel) gilt:

$$\sigma_{0,rel} = \sqrt{\sigma_+ \cdot \sigma_-}$$

$$\sigma_{0,klass} = \frac{2\sigma_+\sigma_-}{(\sigma_+ + \sigma_-)}$$

$$\sigma = \lambda^{-1}$$

Messung:

$$\sigma_0 = 15233.25673 \pm 0.00005 \text{ cm}^{-1}$$

$$\sigma_{0,rel} = 15233.2549 \pm 0.0010 \text{ cm}^{-1}$$

$$\sigma_{0,klass} = 15232.4903 \pm 0.0010 \text{ cm}^{-1}$$

Systematische Fehler (in Wellenzahlen):

Größe	Fehler ( $\text{cm}^{-1}$ )
Winkel	$2 \cdot 10^{-4}$
Beschleunigungs-Spannung	$11 \cdot 10^{-4}$
$I_2$ -Peak 728	$10 \cdot 10^{-4}$
$I_2$ -Peak 194	$20 \cdot 10^{-4}$
H-Zentrum	$25 \cdot 10^{-4}$
Gesamt	0.0035

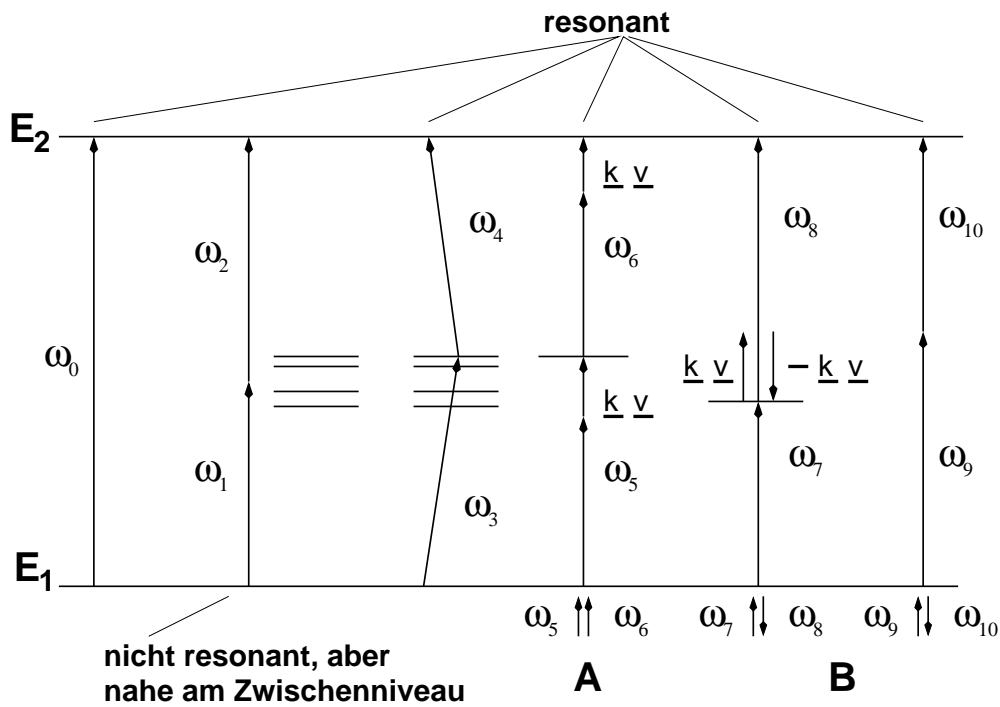
Relativer Gesamt-Fehler:

$$\delta_{rel/klass} = \frac{\Sigma_{Fehler}}{(\sigma_{0,rel} - \sigma_{0,klass})} = 5 \cdot 10^{-3}$$

Vorteile:

- gilt für alle Ordnungen der SRT (nicht nur quadratische)
- „unabhängig“ von der Beschleunigungs-Spannung

# Genauere Messung mittels Zwei-Photonen-Spektroskopie



**A:**  $\omega_5$  parallel zu  $\omega_6$ :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \hbar \cdot (\omega_3 + \omega_4)$$

$$\omega_3 = \omega_5 + \underline{k \cdot v}$$

$$\omega_4 = \omega_6 + \underline{k \cdot v}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \hbar \cdot (\omega_5 + \omega_6 + 2 \cdot \underline{k \cdot v})$$

**B:**  $\omega_7$  ( $\omega_9$ ) antiparallel zu  $\omega_8$  ( $\omega_{10}$ ):

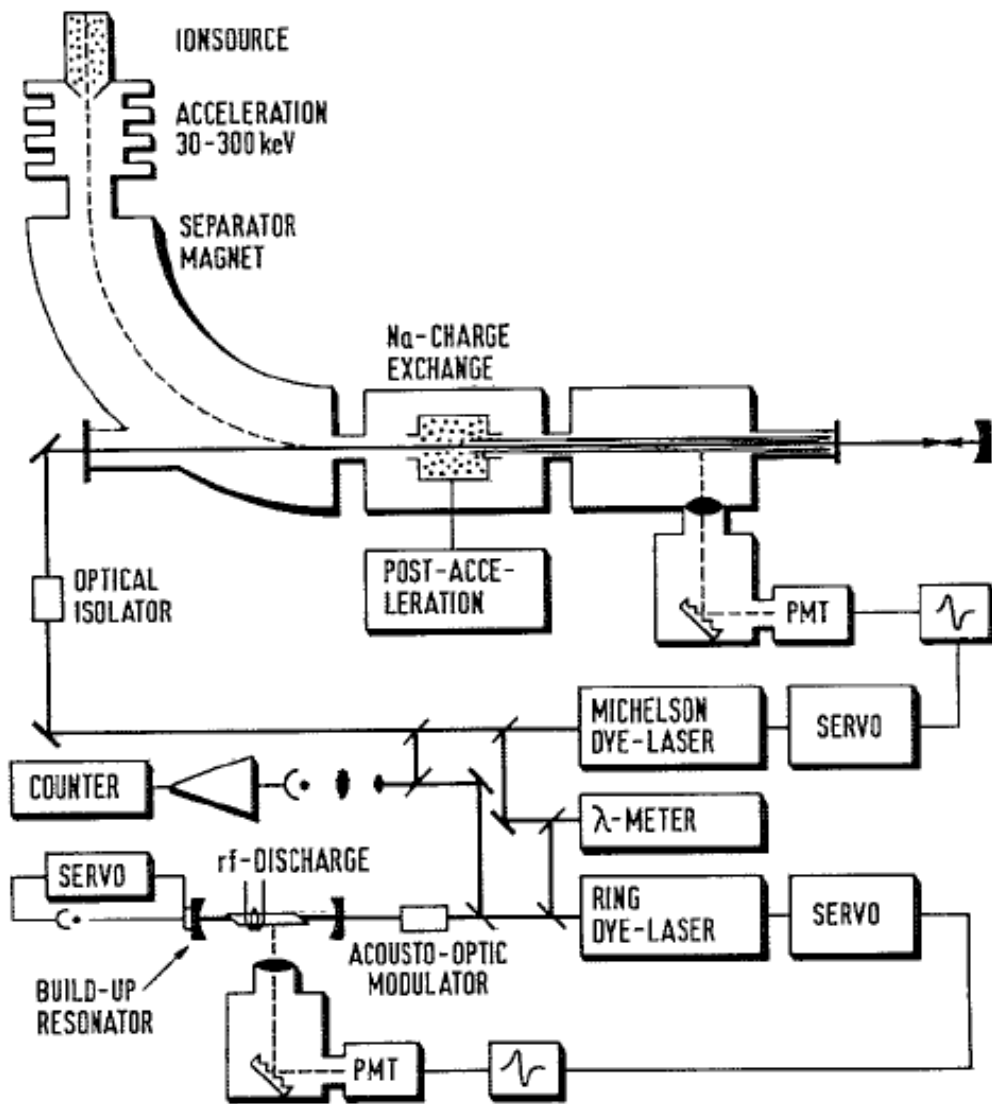
$$\Delta E = \hbar \cdot (\omega_9 + \omega_{10})$$

$$= \hbar \cdot [(\omega_7 + \underline{k \cdot v}) + (\omega_8 - \underline{k \cdot v})]$$

$$= \hbar \cdot (\omega_7 + \omega_8 + \underbrace{\underline{k \cdot v} - \underline{k \cdot v}}_{= 0})$$

$$= \hbar \cdot (\omega_7 + \omega_8)$$

Kaivola (1985): Zwei-Photonen-Spektroskopie an schnellem und thermischem Neon:



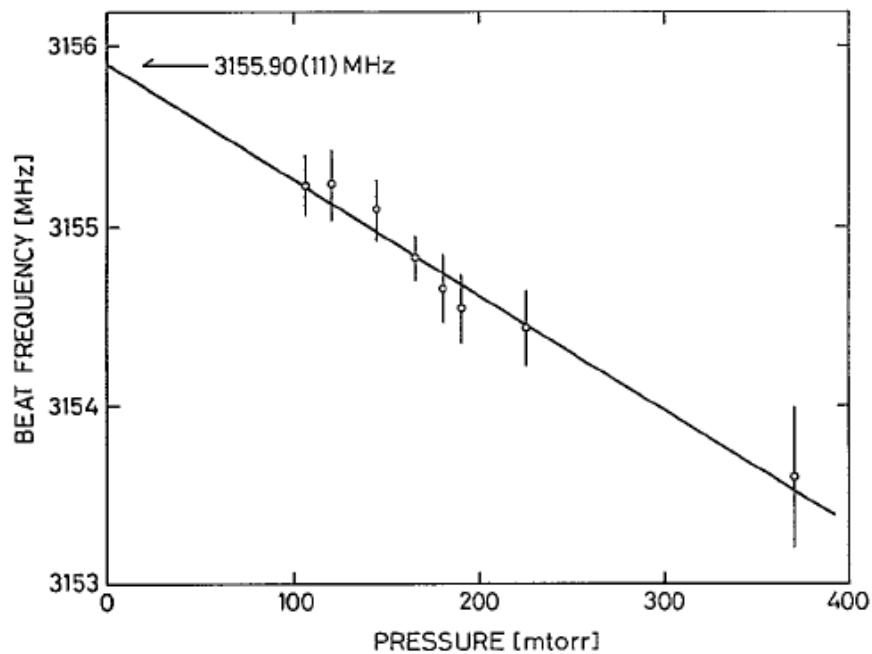
Zwei Laser fest auf TPA-Resonanz eingestellt, sowohl in thermischem als auch in schnellem Neon.

Überlagerung beider Laser  $\Rightarrow$  Schwebungs-Frequenz

Messung Schwebungs-Frequenz genauer als Einzelmessung

Fehler:

Größte Unsicherheit: Druckverbreiterung im therm. Neon



deswegen: Extrapolation nach  $p = 0$

Meßfehler:

Größe	
Frequenz Entladungszelle	$3155.90 \pm 0.11 \text{ MHz}$
Acousto-Optic-Modulator	$80.00 \pm 0.00 \text{ MHz}$
AC-Stark-Shift	$0.04 \pm 0.02 \text{ MHz}$
Laser-Locks	$\pm 0.04 \text{ MHz}$
Beam-Crossing	$\pm 0.02 \text{ MHz}$
magn. Feld	$\pm 0.02 \text{ MHz}$
Spannung	$\pm 0.05 \text{ MHz}$

Doppler-Shift (exp.):

$$3235.94 \pm 0.14 \text{ MHz}$$

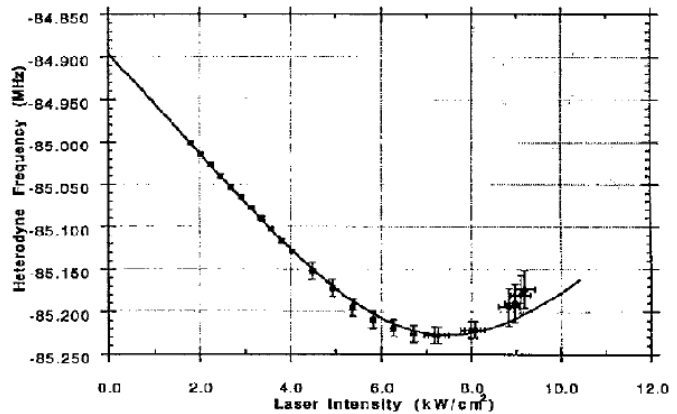
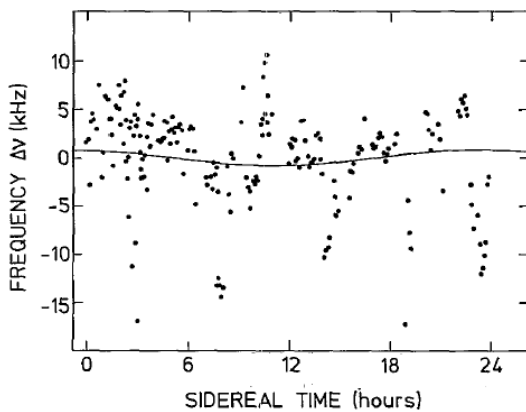
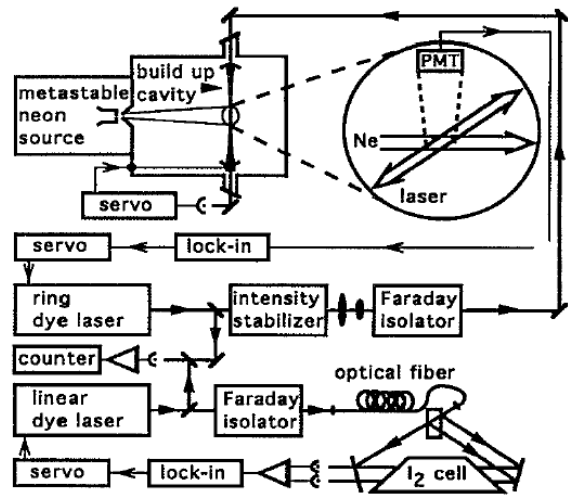
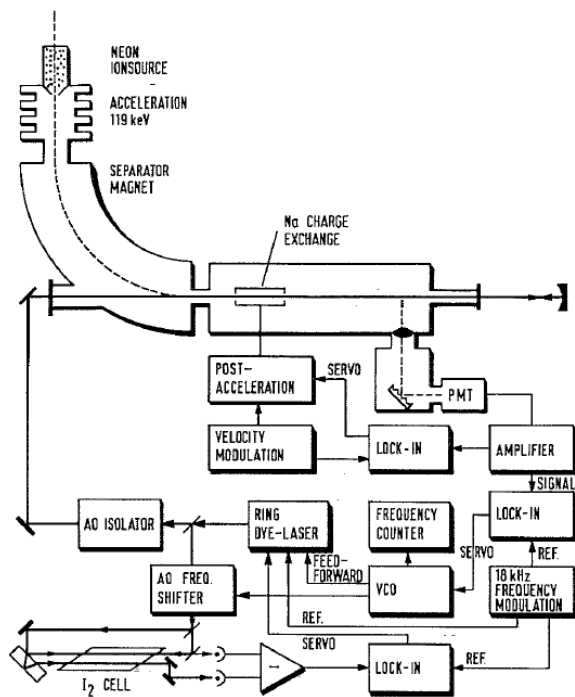
Doppler-Shift (theo.):

$$3235.89 \pm 0.05 \text{ MHz}$$

Relativer Fehler:  $4 \cdot 10^{-5}$

# Ähnliches Experiment: Unterteilung in zwei separate Messungen.

1. Vergleich TPA an schnellem Neon ( $\beta = 0.0036$ ) mit Sättigungs-Spektroskopie an Iod (Riis, 1988)
2. Vergleich TPA an thermischem Neon mit Sättigungs-Spektroskopie an Iod (McGowan, 1993)





## Systematische Fehler:

Fehler (Exp. Riis)	
Laser-Divergenz	$3 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$
Teilchenstrahl	$10^{-4} \text{ rad}$
Asymetrien in Geschw.-Verteilung sowie AC-Stark-Effekt	nicht meßbar
Drift Beschleunigungs-Spannung	$70 \text{ mV (rms)}$
gemessener Doppler-Shift (in Resonanz-Nähe)	$-27 \text{ kHz/V}$
SRT: rel. Fehler	$\pm 1.4 \cdot 10^{-6}$

Fehler (Exp. Riis)	
Beat-Frequency	$520.8050 \pm 0.0012 \text{ MHz}$
Acousto-Optic-Modulator	$-80.034 \pm 0.001 \text{ MHz}$
Winkelfehler	$\pm 0.0027 \text{ MHz}$
Spannung	$\pm 0.0015 \text{ MHz}$
Ionen-Quelle	$\pm 0.003 \text{ MHz}$

Fehler (Exp. McGowan)	
LO Mixing Frequenz	$2880.0000 \pm 0.0000 \text{ MHz}$
Beat-Frequency	$-84.8988 \pm 0.0034 \text{ MHz}$
Laser-Lock	$\pm 0.005 \text{ MHz}$

Doppler-Shift (exp.):  $3235.8722 \pm 0.0076 \text{ MHz}$

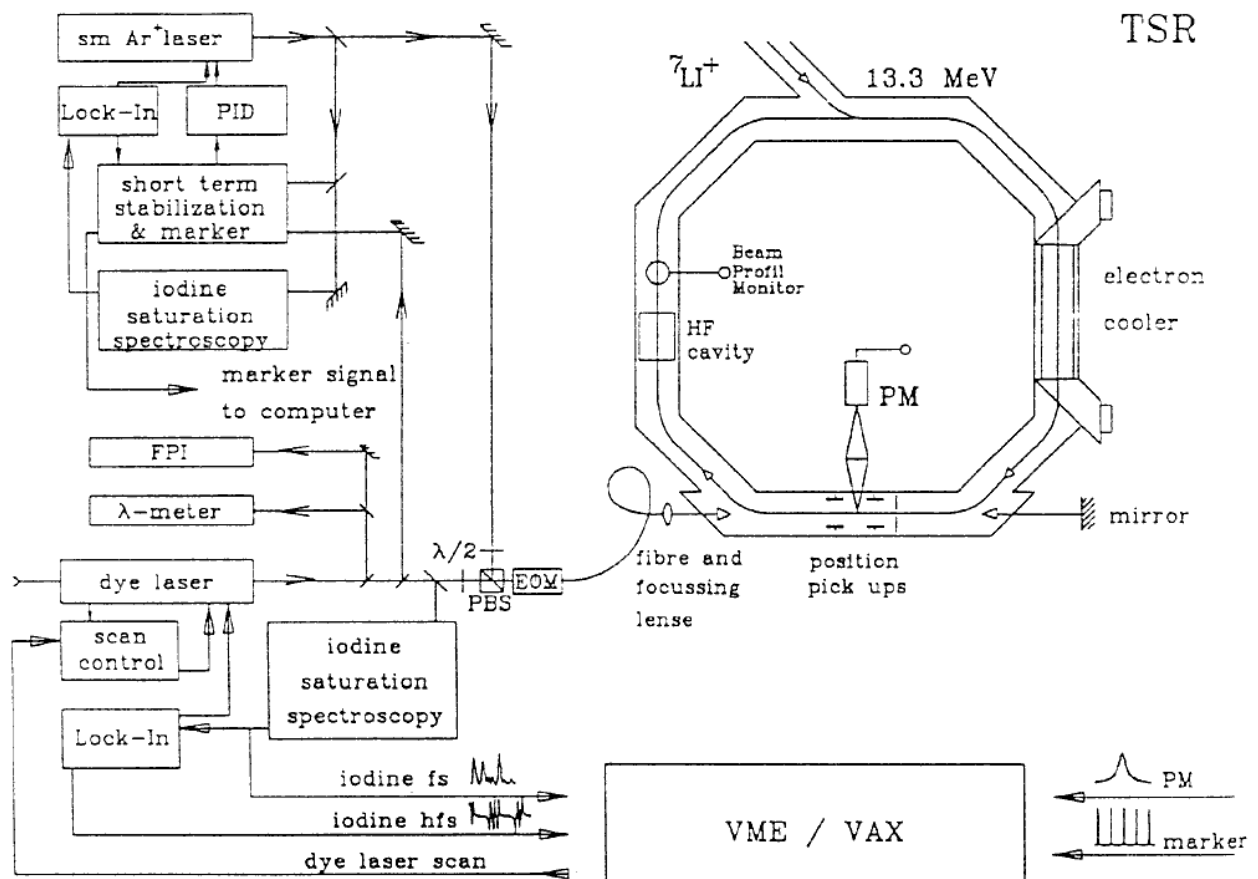
Doppler-Shift (theo.):  $3235.8626 \pm 0.0071 \text{ MHz}$

Messung bis auf  $\pm 7.6 \text{ kHz}$  genau.

⇒ Relativer Fehler von  $2.3 \cdot 10^{-6}$

⇒ auch Messung des Doppler-Effekts vierter Ordnung ( $10.3 \text{ kHz}$ ) möglich.

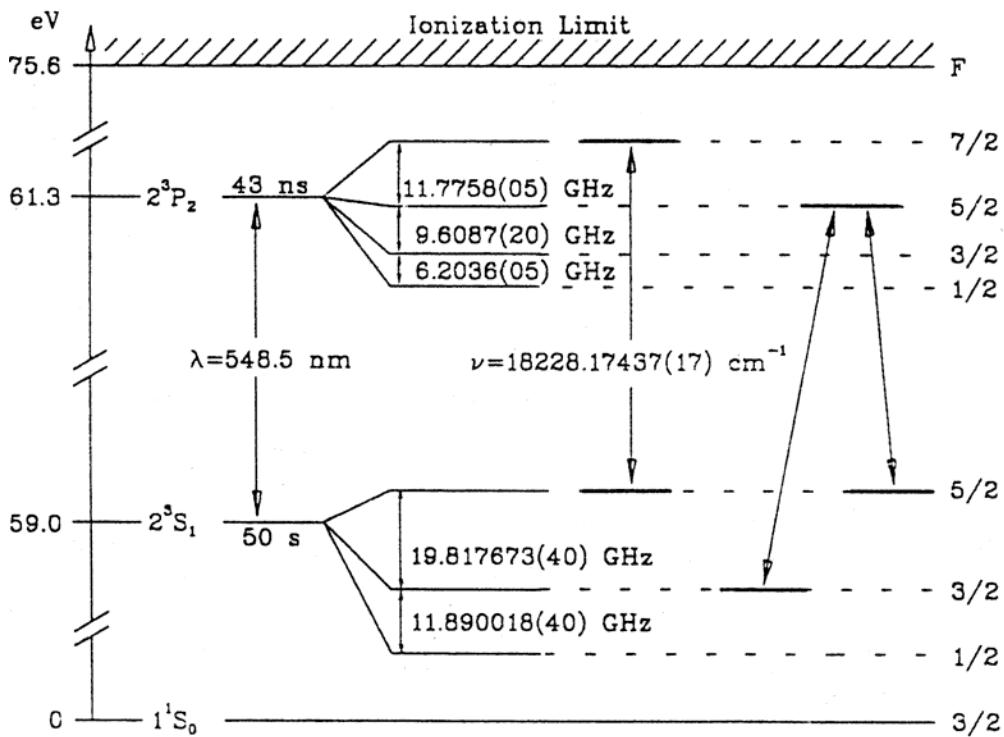
Weitere Steigerung der Genauigkeit durch Verbesserung des Ionenstrahls: Schwerionen-Speicherring TSR in Heidelberg ( $\beta = 0.064$ ):



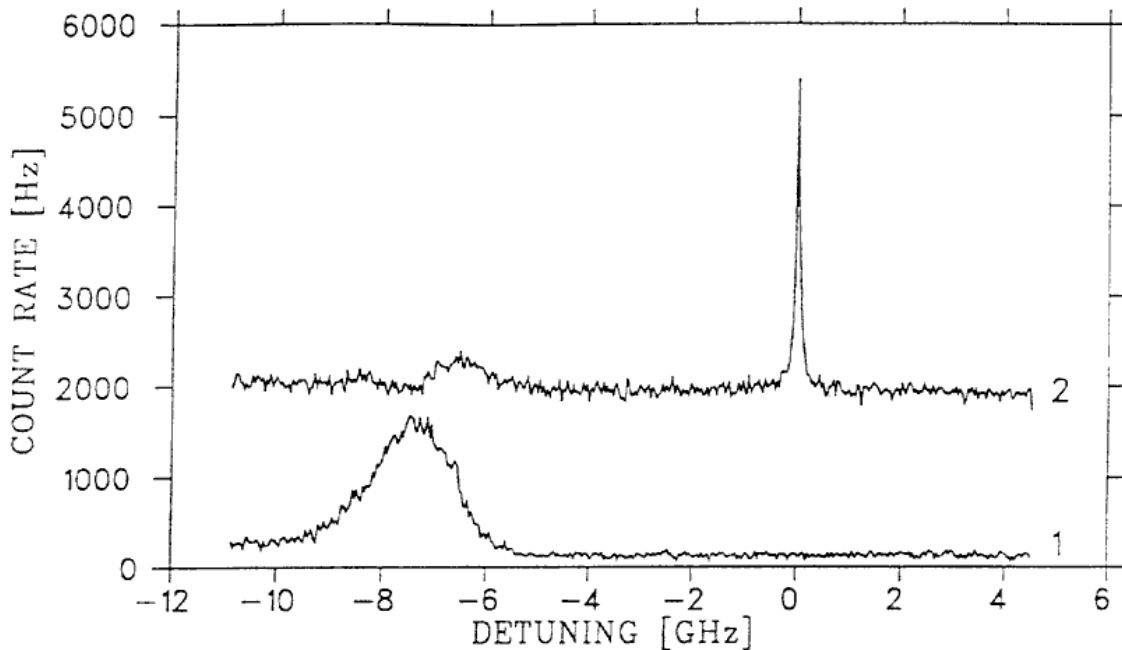
Li<sup>+</sup>-Ionen werden im Ring bechleunigt

TPA mit Ar<sup>+</sup>-Ionen-Laser und Farbstoff-Laser in einem  $\Lambda$ -System  
zusätzliche Sättigungs-Spektroskopie an Jodzelle

# Spektroskopie in einem $\Lambda$ -System:



## Messung der Übergänge:



Untere Kurve: nur Farbstoff-Laser: Übergang 1

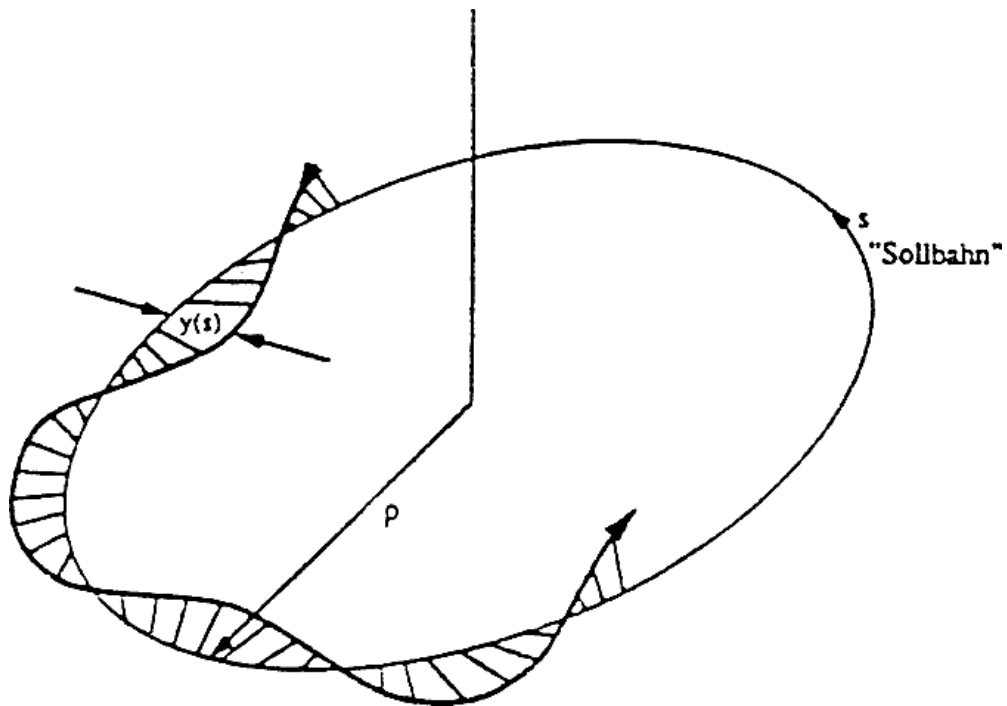
Obere Kurve: zusätzlich  $\text{Ar}^+$ -Laser: Übergang 2 (Pumpen)

Resonanz 1 verschwindet fast völlig

Scharfe TPA-Resonanz durch den Farbstoff-Laser bei 3

Systematische Fehlerquellen:

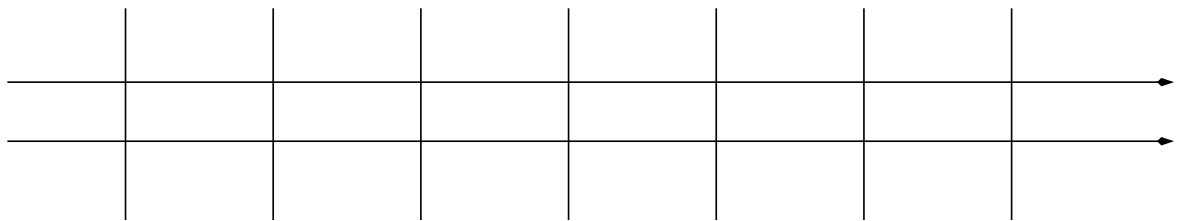
Im Speicherring Abweichung von der Sollbahn:



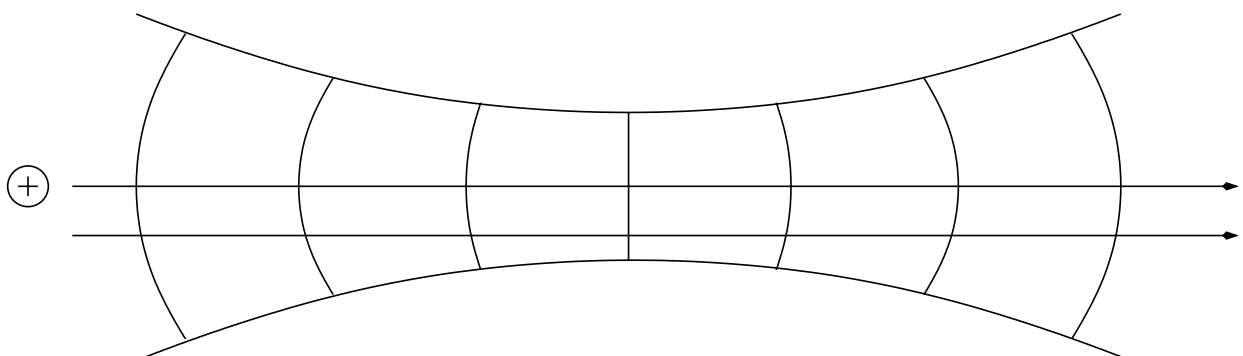
Divergenz des Teilchenstrahls (deswegen: Electron-Cooler)

Unsicherheiten der Phasenfront (Strahlposition)

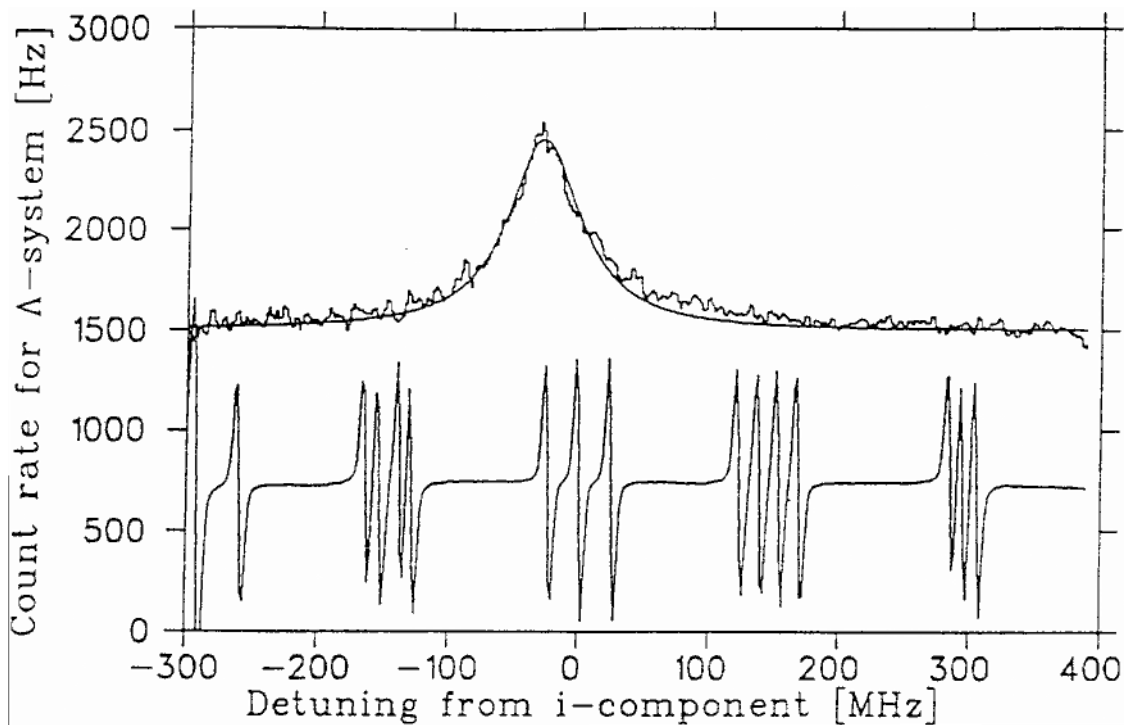
**Ebene Welle:**



**Gauß-Strahl:**



größter Fehler: Phasenfrontunsicherheit ( $\Delta\nu_{FWHM} \sim 60 \text{ MHz}$ )



Phasenfront-Unsicherheit	$\pm 2.7 \text{ MHz}$
Winkelunsicherheit Laser / Laser	$\pm 30 \text{ kHz}$
Winkelunsicherheit Laser / Ionenstrahl	$\pm 285 \text{ kHz}$
AC-Stark-Effekt	$\pm 1 \text{ MHz}$
Photonenrückstoß	$\pm 0.7 \text{ MHz}$
Unsicherheiten in der Lebensdauer	$\pm 0.5 \text{ MHz}$
Gesamtfehler	$< 3.1 \text{ MHz}$

Gemessene Resonanzfrequenz:

$$\nu_{exp} = 512667592 \pm 3.1 \text{ MHz}$$

SRT:

$$\nu_{srt} = 512667590 \pm 3.2 \text{ MHz}$$

Abweichung vom SRT:  $1.1 \cdot 10^{-6}$  und  $2.7 \cdot 10^{-4}$  in vierter Ordnung

Weitere Steigerung durch höhere Geschwindigkeit ( $\beta \sim 0.75$ )  
und Verwendung von neutralem Wasserstoff auf  $\sim 10^{-10}$  möglich.

## Zusammenfassung:

Experiment	Genauigkeit
Kanalstrahlen (1938)	$3 \cdot 10^{-2}$
schneller H-Atome (par./antipar.) (1985)	$5 \cdot 10^{-3}$
schneller H-Atome (Winkel) (1986)	$2.7 \cdot 10^{-4}$
TPA an Neon (schnell und therm.) (1985)	$4 \cdot 10^{-5}$
TPA an Neon (schnell) (1986)	$1.4 \cdot 10^{-6}$
TPA an Neon (therm.) (1993)	$2.3 \cdot 10^{-6}$
TSR schnelles Li (1994)	$1.1 \cdot 10^{-6}$
TSR (aktuell)	$8 \cdot 10^{-7}$
TSR erwartet	$\sim 10^{-10}$

- Relativistischer (quadratischer oder transversaler) Doppler-Effekt mit  $\beta^2$
- Zwei-Photonen-Spektroskopie  
Eliminierung des linearen Doppler-Effekts  
⇒ Test der Speziellen Relativitätstheorie möglich
- Sehr gute Übereinstimmung mit Theorie:  
Genauigkeit zur Zeit bei  $8 \cdot 10^{-7}$
- Weitere Steigerung um 2 – 3 Größenordnungen möglich

## Literatur:

### Experimente:

- Ives, Stilwell, Journ. Opt. Soc. 28, 215-226
- MacArthur, Phys. Rev. Letters 56, 282-285
- Juncar, Phys. Rev. Letters 54, 11-13
- Kaivola, Phys. Rev. Letters 54, 255-258
- Riis, Phys. Rev. Letters 60, 81-84 und 62, 841-842
- McGowan, Phys. Rev. Letters 70, 251-254
- Grieser, Applied Physics B 59, 127-133
- Doktorarbeit von R. Grieser am TSR in Heidelberg

### SRT und Laser:

- MacArthur, Physical Review A 33, 1-5
- Bergmann-Schäfer, Band 3, Optik
- Demtröder, Laser-Spectroscopy